Cálculo Diferencial e Integral III. Primavera 2020

Segundo examen parcial.

Instrucciones:

i) Escribe tu NOMBRE, CU, y el NOMBRE DEL ARCHIVO de tu examen en la primer hoja de las respuestas.
ii) No se permite usar calculadoras.
iii) Cada pregunta vale lo mismo (1/9 cada una).
iv) Tendrás 7 minutos adicionales para preparar y enviar las respuestas a tu profesor, por lo que debes enviar las soluciones a más tardar a las 10:07 am.

Duración: 2 horas

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$. Encuentra un punto de la forma $\mathbf{P} = (x_0, 2x_0)$ tal que la derivada direccional de f en la dirección del vector $(-3, 4)$ en el punto $\mathbf{P}$ valga 6.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = f(x, y)$, una función diferenciable tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 1) = 2\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1)$. Si la derivada direccional de f en la dirección del vector $(4, -3)$ en el punto $(-1, 1)$ vale 8, encuentra la dirección de máximo crecimiento de f en el punto $(-1, 1)$.

3. Supón que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es de clase C^2. Sea $w = f(x, y)$ y sean $x = u^2 + v$, $y = u - v$. Muestra que $\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 2u\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (1 - 2u)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

4. Prueba que no existe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f = f(x, y, z)$, de clase C^3 y tal que para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, la matriz hessiana de f en (x, y, z) es
$$\begin{pmatrix} x^2 & z - x & y \\ z - x & x & -y \\ y & -y & -x \end{pmatrix} \tag{1}$$

5. Sea $f(x, y) = 8y^3 + 12x^2 - 24xy$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Encuentra los puntos críticos de f y clasifícalos como máximos locales, mínimos locales, puntos silla.

6. Sea $f(x, y) = (x^2 - 2y^2)(x + 3y)$. Muestra que $(0, 0)$ es un punto silla de f.

7. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $f(-1, 1, -1) = 2$, $\nabla f(-1, 1, -1) = (1, 2, 3)$ y
$$H_f(-1, 1, -1) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$
Sean L y Q las aproximaciones lineal y cuadrática respectivamente de f en $(-1, 1, -1)$. Encuentra el valor de $L(1, 0, 1)$ y de $Q(1, 0, 1)$.

8. Encuentra los puntos críticos de $f(x, y, z) = y^3 - \frac{x^2}{6} - z^2 - xy - 2z$ y clasifícalos como máximos locales, mínimos locales, puntos silla.

9. Sean f y g funciones de la forma $f(x, y, z) = 3x^2 - y^3z + axz^2$, $g(x, y, z) = y^3 - 3x^2y + axyz$, donde a es una constante. Encuentra el valor de la constante a si se sabe que $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1, -1, 2) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(1, -1, 2)$.