Cálculo Diferencial e Integral III. Otoño 2020
Segundo examen parcial departamental.

Instrucciones:

i) Escribe tu NOMBRE y CU en la primera hoja de las respuestas.
ii) No se permite usar calculadoras.
iii) Cada pregunta vale lo mismo (1/8 cada una).
iv) Tendrás 10 minutos adicionales para preparar y enviar las respuestas a tu profesor, por lo que debes enviar las soluciones a más tardar a las 22:10.

Duración: 2 horas

1. Una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 es tal que
$$\nabla f(x, y, z) = (3x^2 + yz, -3z^2 + xz, ayz + xy) \text{ para todo } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$
donde a es una constante. Encuentra el valor de a.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable, $f = f(x, y)$, tal que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, -2) = 6$ y además la derivadas direccional de f en el punto $(1, -2)$ en la dirección del vector $(1, 1)$ vale $\sqrt{8}$. Encuentra la dirección de máximo crecimiento de f en el punto $(1, -2)$.

3. Si $f(x, y, z) = x^3 - xy + yz^2$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, y si Q es la aproximación cuadrática de f en el punto $(1, 0, -1)$, encuentra el valor de $Q(1, 1, 1)$.

4. Encuentra un vector normal no nulo a la superficie en el espacio xyz definida por la ecuación $z = x^3 + xy^2 - xyz^3 - 13$, en el punto $(2, 1, -1)$.

5. Supón que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es de clase C^2. Sea $w = f(x, y)$ y sean $x = r\cos(\theta)$, $y = r\text{sen}(\theta)$. Muestra que
$$\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\partial r} = -\text{sen}(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} + r\cos(2\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + \frac{r}{2}\text{sen}(2\theta)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right).$$
Recordar: $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \text{sen}^2(\theta)$, $\text{sen}(2\theta) = 2\text{sen}(\theta)\cos(\theta)$.

6. Sea $f(x, y) = x^2 - xy + y^3$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Encuentra los puntos críticos de f y clasifícalos como máximos locales, mínimos locales, puntos silla.

7. Dada la curva en el plano xy descrita por la ecuación $x^3 - 3y + x + 12 = y^3$, encuentra la ecuación de la recta tangente a dicha curva en el punto $(1, 2)$ en la forma $y = mx + b$.

8. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 que tiene un punto crítico en el punto $(1, 2, -1)$ y tal que su matriz hessiana en dicho punto es
$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$
Clasifica el punto crítico de f como máximo local, mínimo local o punto silla. (Justificar)