CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 7
Otoño 2021
Funciones hiperbólicas inversas. Funciones trigonométricas inversas

1. A partir de las definiciones de las funciones $\cosh(x)$ y $\tanh(x)$ muestra que

   (a) $\cosh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad x \geq 1.$

   (b) $\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1.$

2. Determina el dominio y la derivada de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = \cosh^{-1}(2\sqrt{1-x}).$

   (b) $f(x) = \tanh^{-1}(1/2)^x.$

3. Resuelve la siguiente ecuación (valor explícito de x):

$$\operatorname{senh}^{-1}(x) + \cosh^{-1}(x+2) = 0.$$

4. Calcula las siguientes integrales y escribe tu respuesta en términos del logaritmo natural:

   (a) $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}.$

   (b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}.$

5. Halla una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$, efectuando el cambio de variable $x = \cosh(t)$.

6. Simplifica la expresión $\sec\left(\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{x}\right)$.

7. Halla el dominio de cada función y luego encuentra su derivada:

   (a) $f(x) = \sec^{-1}(\ln x).$

   (b) $f(x) = 3\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{x^2-1}).$

8. Sea

$$f(x) = \int_0^{1/x} \frac{1}{t^2+1}\,dt + \int_0^{x} \frac{1}{t^2+1}\,dt, \quad \text{con } x > 0.$$

   (a) Sin resolver la integral, demuestra que f es constante.

   (b) Resolviendo la integral, demuestra que la constante es $\pi/2$.
   Sugerencia: $\cot^{-1}(x) = \tan^{-1}(1/x)$.

9. Determina las siguientes integrales:

   (a) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$.

   (b) $\displaystyle\int_{-2}^{2\sqrt{3}-2} \frac{dx}{x^2+4x+8}$.

   (c) $\displaystyle\int_{-b}^{-b/2} \frac{dx}{\sqrt{-2bx-x^2}}$, $b>0$.

10. Determina una primitiva de la función $f(x)=\sec(x)$, efectuando el cambio de variable $t=\operatorname{sen}(x)$. (Sugerencia: Integra usando la sustitución indicada y luego utiliza el ejercicio 1b.)

11. (a) Prueba que

$$\int \operatorname{sech}(x)\, dx = \tan^{-1}\left(\operatorname{senh}(x)\right) + C.$$

   Sugerencia: $\int \operatorname{sech}(x)\, dx = \int \dfrac{1}{\cosh(x)}\, dx = \int \dfrac{\cosh(x)}{\cosh^2(x)}\, dx$.

   (b) Prueba también que

$$\int \operatorname{sech}(x)\, dx = \operatorname{sen}^{-1}\left(\tanh(x)\right) + C. \quad \text{(Derivar.)}$$