CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 6
Otoño 2021
Logaritmos y exponenciales en otras bases. Funciones hiperbólicas

1. En cada una de las siguientes expresiones despeja y:

   (a) $\log_3(1-y) - \log_3(y) - x = 0, \quad 0 < y < 1.$

   (b) $\dfrac{5^y - 5^{-y}}{2} = 3.$

2. Encuentra el dominio y la derivada de la función en cada inciso:

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{\log_2(\log_2 x)}.$

   (b) $y = \log_3\left(\dfrac{3^x}{1-3^x}\right).$

   (c) $y = (2^x+1)^{1/x}.$

   (d) $y = x^x(\ln x)^{\ln x}.$

   (e) $y = (\ln x)^x + 2^{1/x}.$

3. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 1$, si

$$f(x) = \int_3^{1+2^x} \frac{\log_2(t-1)}{t-1}dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. Determina las siguientes integrales:

   (a) $\displaystyle\int e^x\, 10^x\, dx.$

   (b) $\displaystyle\int_{1/10}^{10} \frac{\log_{10}(x)}{x}dx.$ Simplifica la respuesta.

   (c) $\displaystyle\int_0^{\log_3 2} \frac{1}{1+3^x}dx.$ Simplifica la respuesta.

5. Demuestra que para todo $x \in \mathbb{R}$:

   (a) $e^x = \cosh(x) + \operatorname{senh}(x).$

   (b) $(\cosh(x) + \operatorname{senh}(x))^n = \cosh(nx) + \operatorname{senh}(nx).$

6. Determina el dominio y la derivada de la función en cada inciso:

   (a) $f(x) = \coth(\ln x).$

   (b) $f(x) = \cosh^2(\sqrt{2-e^x}).$

7. Sean

$$A(\theta) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) + \int_{\cos(\theta)}^{1} \sqrt{1-t^2}\, dt, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

y

$$B(x) = \frac{1}{2}\operatorname{senh}(x)\cosh(x) - \int_{1}^{\cosh(x)} \sqrt{s^2-1}\, ds, \quad x \ge 0.$$

Prueba que $A(\theta) = \frac{\theta}{2}$ para todo θ y $B(x) = \frac{x}{2}$ para todo x. (Sugerencia: $A'(\theta) = \frac{1}{2}$ y $B'(x) = \frac{1}{2}$ por la regla de Leibniz.)

8. Determina las siguientes integrales y simplifica la respuesta:

   (a) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^{-x}\operatorname{senh}(x)\ dx.$

   (b) $\displaystyle\int_0^{\ln 10} 4\operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{2}\right)\ dx.$

   (c) $\displaystyle\int_{-\ln 3}^{\ln 3} \sqrt{1+\cosh(x)}\, dx.$