CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 5
Otoño 2021
Funciones inversas. Función exponencial natural

1. En cada inciso encuentra un intervalo en el que f tenga una inversa (halla un intervalo en el que $f' > 0$ o $f' < 0$). No es necesario encontrar f^{-1}.

   (a) $f(t) = t^4 + 2t^2 + 1$.

   (b) $f(x) = \int_{x^2}^{x} \ln t \, dt, \;\; 0 < x < 1$.

2. Sea $f(x) = x^3 + x - 1$.

   (a) Muestra que f es diferenciable y creciente en $\mathbb{R}$.

   (b) Si f^{-1} denota la inversa de f, calcula $\dfrac{d}{dx} f^{-1}(9)$. (Nota que $f(2) = 9$.)

3. Sea $f(x) = 2e^{3x} + \int_0^x \sqrt{3 + 2t^4 + t^6}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}$.

   (a) Justifica que f es diferenciable.

   (b) Demuestra que f es creciente, y por tanto posee una inversa f^{-1}.

   (c) Encuentra $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

4. Resuelve la ecuación $3e^x + 2e^{-x} = 7$.

5. Determina la derivada y' en cada inciso:

   (a) $y = \dfrac{1}{e^{2x} \ln x}$.

   (b) $y = \int_1^{e^{(x^2)}} \ln^2\left(\sqrt{t}\right) dt$. Simplifica la respuesta.

   (c) $e^{xy} + y = 2$.

6. Determina la integral en cada inciso:

   (a) $\displaystyle\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$.

   (b) $\displaystyle\int_{-\ln 3}^{0} \sqrt{e^x} dx$.

   (c) $\int_0^{\ln 2} \dfrac{1}{e^x + 1} dx$.

7. Encuentra el valor de a y la función $f(x)$ que satisfacen

$$a + \int_a^{x^2} \frac{f(t)}{t} dt = e^x + x^2 - e.$$

8. (a) Obtén las coordenadas del máximo absoluto de $\dfrac{\ln(x)}{x}$ en $(0, \infty)$.

   (b) Demuestra que $x^e \leq e^x$ para todo $x > 0$, y $x^e = e^x$ si y sólo si $x = e$.

9. Sea $k \in \mathbb{R}$ y considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} + 2k - \dfrac{1}{2}, & \text{si } x > 0 \\ k, & \text{si } x = 0 \\ \left(k^2 + \dfrac{k}{2}\right) \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

   (a) Determina k de modo que f sea continua en $x = 0$.

   (b) Demuestra que para todo $x > 0$, $e^{-1/x^2} \in (0, 1)$.

   (c) Para $k = 1/2$ define la inversa de la restricción de f a $\mathbb{R}^+$.

10. Sea $f > 0$ una función continua en el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y diferenciable en (a, b). Demuestra que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}.$$