Cálculo Diferencial e Integral III. Otoño 2021

Laboratorio 3: Derivadas parciales, diferenciación, planos tangentes

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$. Sea $z = T(x, y)$ la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(-1, 2, -7)$.

   (a) Encuentra la ecuación del plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el punto $(1, -1, 3)$ y que es paralelo al plano $z = T(x, y)$.

   (b) Encuentra un vector no nulo que sea ortogonal al plano $z = T(x, y)$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(1, -2 + h) - f(1, -2)}{h} = 4$. Supón que a es una constante tal que

$$\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{|f(x, y) - (f(1, -2) + (a + 1)(x - 1) + (3a - 1)(y + 2))|}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y + 2)^2}} = 0.$$

   Encuentra el valor de las derivadas parciales de f en el punto $(1, -2)$.

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por $\mathbf{F}(\vec{x}) = A\vec{x}$. Muestra que la derivada de $\mathbf{F}$ en $\vec{x}$, denotada por $\mathrm{D}\mathbf{F}(\vec{x})$, es A para toda $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

   Nota: La derivada de una función $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en $\vec{x}$ también es conocida como *matriz jacobiana* de $\mathbf{F}$ en $\vec{x}$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = f(x, y)$, diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$. Muestra que si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son constantes, entonces f es de la forma $f(x, y) = ax + by + c$, donde a, b, c son constantes.

5. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 - x_2, x_1^2 + x_2x_3, x_3^3 - x_1x_2)$. Calcula $\mathrm{D}\mathbf{F}(2, 2, 1)$.

6. Sea A una matriz de n por n con entradas reales cuya entrada (i, j) es a_{ij}. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \vec{x}^T A\vec{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$. Muestra que $\nabla f(\vec{x}) = ((A + A^T)\vec{x})^T = \vec{x}^T(A + A^T)$. *Sugerencia*: para calcular la parcial respecto a x_p, $p = 1, .., n$, observar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = a_{pp}x_p^2 + \sum_{i=1, i\neq p}^{n} a_{ip}x_ix_p + \sum_{j=1, j\neq p}^{n} a_{pj}x_px_j + \sum_{i=1, i\neq p}^{n}\sum_{j=1, j\neq p}^{n} a_{ij}x_ix_j$.