

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Laboratorio 4

Otoño 2021

Función logaritmo natural.

1. A partir de la gráfica de $y = \ln x$ bosqueja la gráfica de las siguientes funciones, proporcionando el dominio de cada una de ellas:

(a) $y = \ln(1/x)$.

(b) $y = \frac{1}{\ln x}$.

(c) $y = \ln|x|$.

(d) $y = |\ln x|$.

2. (a) Justifica que, en general, es falsa la igualdad $\ln(x^2) = 2 \ln x$.
Sugerencia: analiza los dominios de las funciones $\ln(x^2)$ y $2 \ln x$.

(b) Demuestra que $\ln(x^2) = 2 \ln|x|$, para todo $x \neq 0$.

3. Proporciona el dominio de cada función y luego encuentra su derivada:

(a) $f(x) = (\ln x) \ln(\sin x)$.

(b) $f(x) = \frac{1}{\ln x} + \ln(1/x)$.

(c) $f(x) = \ln(\sqrt{-\ln x})$.

(d) $f(x) = \ln^2\left(\frac{3x+2}{x^4}\right)$.

(e) $f(x) = \int_0^x \ln(2-t) \left(\frac{1+t^4}{t^3+2}\right) dt$.

4. Determina las siguientes integrales:

(a) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$. (Observa que $\ln e = 1$.)

(b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - 2x}$.

(c) $\int \frac{1}{3+x^{1/3}} dx$. Utiliza la sustitución $u = 3+x^{1/3}$.

5. Utiliza derivación logarítmica para encontrar la derivada de la función

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{(x^2 + 1)^{5/2} \sqrt{2 + \sin x}}.$$

6. (a) Prueba que si $t \geq 1$, entonces $\frac{1}{t} < \frac{1}{\sqrt{t}}$, y de aquí obtén que

$$0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x} - 2, \quad \text{para toda } x \geq 1.$$

- (b) Concluye que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

7. Determina una función diferenciable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sea par, con $f(0) = 0$ y tal que

$$\ln(1 + f(x)) = \int_0^{x^2} \frac{\operatorname{sen}(t)}{1 + f(\sqrt{t})} dt, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

8. Sea $L : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que

$$L(xy) = L(x) + L(y)$$

y

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{L(1+t)}{t} = 1. \quad (*)$$

Prueba que $L(x) = \ln x$, para todo $x > 0$.

Sugerencia: Prueba que $L(1) = 0$ y usa (*) para demostrar que $L'(x) = 1/x$.