CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 2
Otoño 2021
Teorema Fundamental del Cálculo.

1. Halla la derivada de la función en cada inciso (sin integrar):

   (a) $G(x) = \int\limits_{x}^{1} \sqrt{1+t^4}\, dt.$

   (b) $G(x) = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1+t^4}\, dt.$

   (c) $G(x) = \int\limits_{0}^{1} x^2\sqrt{1+t^4}\, dt.$

   (d) $G(x) = \int\limits_{0}^{x} x^2\sqrt{1+t^4}\, dt.$

   (e) $G(x) = \int\limits_{-2x}^{2x} \sqrt{1+t^4}\, dt.$

   (f) $G(t) = \displaystyle\int_{t^2}^{t^4} \frac{t^2}{1+\sqrt{x}}\, dx.$

2. Determina la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \displaystyle\int_{\pi/2}^{x} x\,\frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$ en $x = \frac{\pi}{2}$, para estimar el valor de $f(\frac{\pi}{2}+0.1)$.

3. Para $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ define

$$S(\theta) = \int\limits_{0}^{\operatorname{sen}\theta} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

   Usa la regla de Leibniz para probar que $S'(\theta) = 1$ para todo $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Concluye que $S(\theta) = \theta$ para todo $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

4. Calcula $f(2)$, si f es continua y satisface la fórmula dada para todo $x \geq 0$:

$$\int_{0}^{x^2} f(t)dt = x^2(1+x).$$

5. Sea f continua en $[a,b]$. Demuestra que existe $x \in [a,b]$ tal que

$$\int_{a}^{x} f(t)\, dt = \int_{x}^{b} f(t)\, dt.$$

   Sugerencia: Considera la función $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt - \int_x^b f(t)\, dt$.

6. Calcula el siguiente límite (sin usar la regla de L'Hopital):

$$\lim_{x \to 1} \frac{x}{x-1} \int_1^x \frac{t^2}{t^4+1}\, dt.$$

Sugerencia: Usa $F'(1) = \lim_{x \to 1} \dfrac{F(x) - F(1)}{x-1}$ y aplica el TFC.