

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Laboratorio 1

Otoño 2021

La integral definida. Teorema del valor medio para integrales.

1. Evalúa la integral $\int_0^1 \sqrt{x} dx$ como el límite de una suma de Riemann, usando la partición de $[0, 1]$ en donde

$$x_k = c_k = \frac{k^2}{n^2}$$

y, correspondientemente,

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}.$$

2. En cada inciso argumenta si en el intervalo dado la función es: (i) continua, (ii) acotada, (iii) integrable:

$$(a) f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1, 0) \\ 5, & x = 0 \\ -2, & x \in (0, 1] \end{cases} \quad \text{en } [-1, 1].$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen } x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \quad \text{en } [-10\pi, 10\pi].$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{en } [0, 1].$$

3. Calcula $\int_{-1}^1 |2x+1| dx$.
4. Determina $\int_{-2}^a |x| dx$. Analiza los casos $a \leq 0$ y $a > 0$.
5. Prueba que $\frac{x^6}{\sqrt{2}} \leq \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^6$, si $x \in [0, 1]$. Concluye que

$$\frac{1}{7\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}} dx \leq \frac{1}{7}.$$

6. Demuestra que si f es integrable en $[a, b]$, entonces

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Sugerencia: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$.

7. Sea $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Supón que $\int_1^3 f(x) dx = 4$. Prueba que existe $c \in [1, 3]$ tal que $f(c) = 2$.
8. Sabiendo que $\int_{-1}^8 3\sqrt{x+1} dx = 54$, encuentra un número real c que satisfaga la conclusión del teorema del valor medio.
9. Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable no negativa. Demuestra que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx.$$

Sugerencia: para el caso $\int_a^b g(x) dx \neq 0$, encuentra cotas inferior y superior para el cociente $\int_a^b f(x)g(x) dx / \int_a^b g(x) dx$ y luego utiliza el TVI.