

## Cálculo Diferencial e Integral III. Otoño 2021

### Laboratorio 4: Trayectorias, Regla de la Cadena (Parte I)

1. Un objeto se mueve en el espacio  $xyz$  de tal manera que su posición al tiempo  $t$  es  $\mathbf{r}(t) = (t^3 - 2t, t^2 + t, t - 1)$  para  $t \leq 1$ . Al tiempo  $t = 1$  el objeto comienza a moverse sobre una línea recta en dirección del vector  $\mathbf{r}'(1)$  y a velocidad constante. Encuentra la posición del objeto al tiempo  $t = 2$ .

2. Si  $x(t) = t^2 + 1$ ,  $y(t) = e^{2t}$  para toda  $t > 0$ ,

(a) Encuentra  $\frac{dy}{dx}$  como función de  $t$ . *Sugerencia:* Usa la relación  $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dt}\right) \left(\frac{dt}{dx}\right)$  junto con  $\frac{dt}{dx} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1}$ .

(b) Encuentra  $\frac{d^2y}{dx^2}$  como función de  $t$ . *Sugerencia:* Si  $g(t) = \frac{dy}{dx}(t)$ , entonces  $\frac{d^2y}{dx^2}$  se define como  $\frac{dg}{dx}$ . Usa el inciso anterior.

3. (Tomado del examen de muestra GRE de Matemáticas) Una curva en el plano  $xy$  está dada paramétricamente por  $x = t^2 + 2t$ ,  $y = 3t^4 + 4t^3$  para toda  $t > 0$ . El valor de  $\frac{d^2y}{dx^2}$  en el punto  $(8, 80)$  es:

(A) 4      (B) 24      (C) 32      (D) 96      (E) 192

4. Sea  $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , una trayectoria de clase  $C^1$ . Si  $t_0 < t_1$ , la longitud de la curva (o longitud de arco) descrita por la trayectoria al variar  $t$  de  $t_0$  a  $t_1$  se define como

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

Dada la hélice parametrizada por  $\mathbf{r}(t) = (\cos(5t), \sin(5t), t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , encuentra la longitud de la curva descrita por la trayectoria al variar  $t$  de 0 a 2.

5. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable y tal que  $f(x, y) = f(y, x)$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Usa una composición de funciones y la *regla de la cadena* para demostrar que  $f_x(a, b) = f_y(b, a)$ .

Nota: Aquí  $f_x$  denota la derivada parcial de  $f$  respecto a  $x$ .

6. Usa la regla de la cadena para calcular  $D(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})(1, 2)$  con  $\mathbf{F}(u, v, w) = (v + uw, u^2 + w^2, uw^2 + v^3)$  y  $\mathbf{G}(x, y) = (xy^2, x - y^2, 3x + 1)$ .

7. Sea  $z = x^2 - \frac{x}{y}$ ,  $x = u^2 + v^2$ ,  $y = 3u - v$ . Encuentra el valor de  $\frac{\partial z}{\partial u}$  cuando  $u = 1$ ,  $v = -1$ .