

Cálculo Diferencial e Integral III. Otoño 2021

Ejercicios de práctica

Los siguientes ejercicios son de práctica para los temas siguientes (revisar también los ejercicios de los Laboratorios del 1 al 4):

- a) Curvas y conjuntos de nivel
- b) Conjuntos abiertos, cerrados, frontera
- c) Límites y continuidad
- d) Derivadas parciales, diferenciación, planos tangentes
- e) Trayectorias, regla de la cadena.

Curvas de nivel y conjuntos de nivel

1. Dibuja las curvas de nivel de $f(x, y) = e^{x^2-y^2}$ correspondientes a los valores $c = 1$, $c = e$, $c = 1/e$.
2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 - 4xy + 5y^2$. Muestra que el conjunto de nivel de f correspondiente al valor -1 es el conjunto vacío. Dibuja la curva de nivel correspondiente al valor $c = 0$.
3. El punto $(3, 4)$ pertenece a una curva de nivel de f , con $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 3$. Dibuja la curva.
4. El punto $(-3, 4)$ pertenece a una curva de nivel de f , con $f(x, y) = x^2 + y^2 - 9$. Dibuja dicha curva.
5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = ax^2 + 2x + 4y^2 + 1$. Encuentra el valor de la constante a para el cual se cumple que el punto $(-2, 1)$ pertenece a la curva de nivel correspondiente al valor $c = -3$.
6. Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3$, $g(x, y) = x - y - 1$. Encuentra los puntos en \mathbb{R}^2 que están tanto en la curva de nivel de f como en la de g correspondientes al valor $c = 2$.
7. Dibuja la curva de nivel de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + 2y$ correspondiente al valor 1.
8. Dibuja la curva de nivel de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 - x$ correspondiente al valor 0.
9. Dibuja las curvas de nivel de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x/y$ correspondientes a los valores $c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$.
10. Dibuja las curvas de nivel de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \max(|x|, |y|)$ correspondientes a los valores $c = 0, 1, 2$.
11. Dibuja o describe las superficies en \mathbb{R}^3 descritas por las ecuaciones siguientes:

- (a) $4x^2 + y^2 = 16$
- (b) $z = x^2$
- (c) $y^2 + z^2 = 4$
- (d) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{9} = 1$.

12. Sea S la superficie en \mathbb{R}^3 definida por la ecuación $x^2y^6 - 2z = 3$.

- (a) Encuentra una función $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x, y, z)$, tal que S sea el conjunto de nivel de f correspondiente al valor $c = 4$.
- (b) Encuentra una función $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g = g(x, y)$, tal que S sea la gráfica de g .

13. Dibuja la gráfica representada por la ecuación $x = 1$ en los siguientes casos:

- (a) Como una ecuación en \mathbb{R} (eje x).
- (b) Como una ecuación en \mathbb{R}^2 (plano xy).
- (c) Como una ecuación en \mathbb{R}^3 (espacio xyz).

Conjuntos abiertos, cerrados, frontera

1. Encuentra la frontera del conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 1\} \cup \{3\}$.
2. Encuentra la frontera del conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x^2\}$.
3. Notar que el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ es abierto en \mathbb{R} . Demuestra que el conjunto $B = \{(x, 2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1\}$ no es abierto en \mathbb{R}^2 .
4. Demuestra que el conjunto de números enteros es cerrado en \mathbb{R} .
5. Sean A, B subconjuntos de \mathbb{R}^n tales que A es abierto y B es cerrado. Muestra que el conjunto C definido como $C = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} \in A \text{ y } \vec{x} \notin B\}$ es abierto.
6. Si U es un conjunto abierto en \mathbb{R}^n , justifica por qué la frontera de U está en el complemento de U .

Límites y continuidad

1. Demuestra que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y(x-y)}{x^4 + y^4}$ no existe.
2. Demuestra que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$ no existe.
3. Demuestra que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = 0$.

4. Demuestra que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(xy)}{y} = 0$. *Sugerencia:* $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(t)}{t} = 1$.
5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$. Demuestra que f no es continua en $(0, 0)$.

Trayectorias en \mathbb{R}^n

- Un objeto se mueve en el plano xy de tal manera que su posición al tiempo t es $\mathbf{r}(t) = (t - t^3, 2t + t^2)$ para $t \leq 2$. Al tiempo $t = 2$ el objeto comienza a moverse sobre una línea recta en dirección del vector $\mathbf{r}'(2)$ y a velocidad constante. Encuentra la posición del objeto al tiempo $t = 3$.
- Repetir el ejercicio anterior pero con la trayectoria en \mathbb{R}^3 dada por $\mathbf{r}(t) = (2t, t^2, t^3 - 2t^2)$.
- Una partícula se mueve sobre un círculo en el plano xy . Su posición al tiempo t está dado por $\mathbf{r}(t) = (\cos(t^2 - t), \text{sen}(t^2 - t))$. Observar que la partícula se encuentra en la posición $(1, 0)$ en los tiempos $t = 0$ y $t = 1$. Decide si la partícula se mueve en el sentido de las manecillas del reloj o en el sentido contrario para cada uno de los tiempos $t = 0, t = 1$.
- El vector posición al tiempo t para una partícula que se mueve sobre una hélice es $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (\cos(t), \text{sen}(t), t^2)$.
 - Encuentra la velocidad de la partícula en el instante $t_0 = 4\pi$.
 - Encuentra una parametrización para la recta tangente a la curva descrita por la trayectoria \mathbf{r} al tiempo $t_0 = 4\pi$.
 - ¿En qué punto la recta tangente intersecta al plano xy ?
- Sean $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$ y $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t)$, $t \in [a, b]$, dos trayectorias diferenciables en \mathbb{R}^n . Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)$, donde \cdot representa el producto punto de dos vectores. Muestra que $f'(t) = \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}'_2(t) + \mathbf{r}'_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)$ para toda $t \in [a, b]$.
- Sea $\mathbf{r}(t)$ la posición de una partícula al tiempo t . Suponer que \mathbf{r} es de clase C^2 . La aceleración de la partícula al tiempo t se define como el vector $\mathbf{r}''(t)$. Muestra que si la partícula se mueve con rapidez constante, entonces la velocidad y la aceleración de la partícula al tiempo t son vectores ortogonales. Es decir, $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t) = 0$ para toda t . *Sugerencia:* Escribe el cuadrado de la rapidez como un producto punto. Puedes usar el ejercicio anterior.
- Sean $r = r(t)$ y $\theta = \theta(t)$, con $t \in \mathbb{R}$, dos funciones clase C^1 con valores reales tales que $r(t) > 0$. Sean $x(t)$ y $y(t)$ dadas por $x(t) = r(t) \cos(\theta(t))$, $y(t) = r(t) \text{sen}(\theta(t))$. Muestra que $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{x^2 + y^2} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right)$. *Sugerencia:* Escribe $y(t)/x(t)$ en términos de la función tan y usa diferenciación implícita.

8. La curva descrita por la trayectoria

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (R(t - \operatorname{sen}(t)), R(1 - \operatorname{cos}(t))), \quad (1)$$

con R constante positiva, recibe el nombre de *cicloide*. Cuando un objeto viaja de un punto \mathbf{P}_1 a un punto \mathbf{P}_2 puede seguir muchos caminos. Si el objeto se mueve únicamente por la influencia de la gravedad, el camino que debe seguir para llegar lo más rápido posible a \mathbf{P}_2 es un arco de una cicloide suponiendo lo siguiente: el punto \mathbf{P}_1 está localizado a mayor altura que \mathbf{P}_2 , la fuerza de gravedad se mantiene constante, el punto \mathbf{P}_2 no está directamente hacia abajo de \mathbf{P}_1 (en caída libre el objeto no pasa por \mathbf{P}_2).

Muestra que de (1) se obtiene:

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2R}{y}, \text{ para } y > 0.$$

Sugerencia: Usa la relación $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dt}\right) \left(\frac{dt}{dx}\right)$ junto con $\frac{dt}{dx} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1}$.

Diferenciación, planos tangentes, regla de la cadena

Nota: En algunos ejercicios se usa la notación f_x para denotar la derivada parcial de f respecto a x : $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$. Si F es una función de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m , se usa la notación $DF(\vec{x})$ o bien $F'(\vec{x})$ para denotar la derivada de F en $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Las funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m serán denotadas en letras negritas cuando $m > 1$.

1. Encuentra la ecuación del plano tangente a la gráfica de $f(x, y) = x^2 - 4y + e^{-2x^2 + y}$ en el punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, -6)$.
2. Encuentra un vector normal unitario a la gráfica de $f(x, y) = x^2 - 4xy + x^3 - y^2$ en el punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, -10)$.
3. Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$, $g(x, y) = x^3 + y^3 - x - 5y + 6$. Muestra que las gráficas de ambas funciones tienen el mismo plano tangente en el punto $(1, 1, 2)$.
4. Sea $h(x, y, z) = (x + z)e^{x-y}$. Encuentra $\nabla h(1, 1, -3)$.
5. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 y tal que $f'(7) = 3$. Sea h función dada por $h(x, y) = f(x^2 - 2y^2)$. Encuentra $\nabla h(3, 1)$.
6. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z, 1 - z^2 + 2x)$. Encuentra $D\mathbf{F}(2, 1, 1)$.
7. Sea $z = \frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2}$ con $u = e^{2x-y}$, $v = 3e^{xy-2}$. Usa la regla de la cadena para encontrar el valor de $\frac{\partial z}{\partial y}$ cuando $x = 1$, $y = 2$.

8. Sea $z = x^2 - \frac{x}{y}$, $x = u^2 + v^2$, $y = 3u - v$. Encuentra el valor de $\frac{\partial z}{\partial v}$ cuando $u = 1$, $v = -1$.
9. Sea $z = f\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$ donde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable. Muestra que $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
10. Sea $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $G = G(x, y)$, función diferenciable. Supón que $y = y(x)$ es una función diferenciable definida implícitamente con la ecuación $G(x, y(x)) = 0$. Muestra que $\frac{dy}{dx} = -\frac{G_x}{G_y}$ si $G_y \neq 0$.
11. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y $z = f(x - y)$. Muestra que $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
12. Sean $\mathbf{G}(u, v) = (e^u, u + \text{sen}(v))$ y $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, yz)$. Calcula $D(\mathbf{G} \circ \mathbf{F})$ en $(0, 1, 0)$ utilizando la regla de la cadena.
13. Usa la regla de la cadena para calcular $D(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})(-2, 1)$ con $\mathbf{F}(u, v, w) = (v^2 + uw, u^2 + w^2, u^2v - w^3)$ y $\mathbf{G}(x, y) = (xy^3, x^2 - y^2, 3x + 5y)$.
14. Sea $w = x^2 + y^2 + z^2$, $x = uv$, $y = u \cos(v)$, $z = u \text{sen}(v)$. Usa la regla de la cadena para hallar $\frac{\partial w}{\partial u}$ cuando $(u, v) = (1, 0)$.
15. Sea $z = f(x, y)$ función diferenciable de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} . Si $x = r \cos(\theta)$, $y = r \text{sen}(\theta)$, encuentra una fórmula para $\frac{\partial z}{\partial \theta}$. Para el caso $f(x, y) = x^2 + 3y^2$, calcula $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ cuando $r = 2$ y $\theta = \pi/4$.
16. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y tal que $f(x, y) = f(y, x)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Muestra que $f_x(a, b) = f_y(b, a)$.
17. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y tal que $f(x, y) = f(x, xy)$ para toda $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Sea $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{G}(x, y) = (x, xy)$. Notando que $f(x, y) = f \circ \mathbf{G}(x, y)$ para toda $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, aplica la regla de la cadena a $f \circ \mathbf{G}$ para demostrar que se cumplen las siguientes igualdades:
- i) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, xy) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, xy)$, ii) $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x\frac{\partial f}{\partial y}(x, xy)$.
18. Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y define $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como $u(x, y) = xy\varphi\left(\frac{x+y}{xy}\right)$. Determina la función $\psi(x, y)$ de tal manera que u satisfaga
- $$x^2u_x - y^2u_y = \psi(x, y)u.$$
19. Sean $\mathbf{c}(t) = (t^3, t^2, 2t)$ y $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 - y^2, 2xy, z^2)$. Encuentra una parametrización de la recta tangente a la curva descrita por la trayectoria $\mathbf{F} \circ \mathbf{c}$ cuando $t = 1$.

20. Sean $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables. Define $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como $g(x, y) = F(f(x, y))$. Muestra que el vector gradiente de g en (x, y) es paralelo al vector gradiente de f en (x, y) .
21. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \frac{x^2 y^4}{x^4 + 6y^8}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$.
- (a) Muestra que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existen.
- (b) Muestra que f no es diferenciable en $(0, 0)$ viendo que f no es continua en $(0, 0)$.
22. Sea A una matriz de m por n con entradas reales. Define $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $\mathbf{F}(\vec{x}) = A\vec{x}$. Muestra que $D\mathbf{F}(\vec{x}) = A$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
23. Sea $\mathbf{u}(x, y, z) = (x, y, z)$ y sea $f(x, y, z) = \frac{1}{\|\mathbf{u}(x, y, z)\|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Demuestra que $\nabla f = -\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^3}$.
24. Sean f y g funciones de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R} . Suponer que f es diferenciable y $\nabla f(\vec{x}) = g(\vec{x})\vec{x}$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Demuestra que las esferas centradas en el origen están contenidas en los conjuntos de nivel de f ; es decir, f es constante en dichas esferas.
25. Sea A una matriz de n por n con entradas reales cuya entrada (i, j) es a_{ij} . Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{x}^T A \vec{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$. Muestra que $\nabla f(\vec{x}) = ((A + A^T)\vec{x})^T = \vec{x}^T (A + A^T)$. *Sugerencia:* para calcular la parcial respecto a x_p , $p = 1, \dots, n$, observar que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = a_{pp} x_p^2 + \sum_{i=1, i \neq p}^n a_{ip} x_i x_p + \sum_{j=1, j \neq p}^n a_{pj} x_p x_j + \sum_{i=1, i \neq p}^n \sum_{j=1, j \neq p}^n a_{ij} x_i x_j$.