Cálculo Diferencial e Integral I

Ejercicios para el Laboratorio 3

1. Sea $f(x) = \sqrt{x}$, con $x \geq 0$. Encuentra una $\delta > 0$, que dependerá de x_0, tal que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ si $|x - x_0| < \delta$, donde $x_0 = 5$ y $\varepsilon = \frac{1}{100}$.

2. Calcula los siguientes límites, y comprueba mediante la definición formal de límite que tu resultado es correcto:

   (a) $\lim_{x\to 1}(x^2 - 2)$

   (b) $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{x} - 1)$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{\sqrt{|1-x^2|}}{\sqrt{x+1}}$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 3x}{3 + x^2}$

3. Determina $\lim_{x\to 2} f(x)$ si se sabe que $1 - x^2 < f(x) - g(x) + 2 < -(1+x)$ y $\lim_{x\to 2} g(x) = -3$

4. Sea $f(x)$ una función que cumple

   $$1 - (x-1)^2 \leq 2f^3(x) - 1 \leq 1 + (x-1)^4$$

   Calcula $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)$

5. Sea $f(x)$ una función que cumple:

   $$f(x) = \frac{x-a}{g(x)}, \quad |g(x)| \geq \frac{1}{3} \quad \forall x \neq a$$

   Calcula $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$

6. Suponiendo

   $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1,$$

   demostrar que

   $$\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{f(x)} = 0, \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x^2)}{f^2(x)} = 1, \quad \lim_{x\to 1} \frac{f(1-x^2)}{1-x^2} = 1.$$