

Examen Final
Cálculo Diferencial e Integral II
Departamento de Matemáticas, ITAM
21 de mayo de 2021

**Duración total (resolución y entrega):
13:00 a 15:45 hrs**

Instrucciones:

- En la primera hoja de respuestas escribe tu nombre y C.U.
- Presenta tus soluciones en el orden de numeración de las preguntas.
- Simplifica en la medida de lo posible.
- Contesta con claridad y limpieza.
- Muestra el trabajo completo y detallado. Una respuesta sin justificación se considerará no contestada.

Aviso importante:

El profesor se reserva el derecho de llamar a consulta a todos los alumnos sospechosos de haber cometido fraude de cualquier tipo durante el examen, para aclarar que el alumno es responsable de todos sus procedimientos.

Cálculo Diferencial e Integral II
Examen Final

1. (a) Obtén el polinomio de Taylor de grado 3 asociado a la función $f(x) = \ln(1+x)$ en $x_0 = 0$.
 (b) Utiliza la fórmula del residuo de Lagrange para estimar el error al aproximar $\ln(1.1)$ con el polinomio obtenido en el inciso anterior.
2. Determina el radio y el intervalo de convergencia de la siguiente serie de potencias:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n(\ln n)^{1/2}}.$$

Recuerda analizar la serie en los extremos del intervalo de convergencia absoluta.

3. (a) **Usando el cambio de variable** $u = \sinh(x)$, demuestra que

$$\int \frac{1}{\cosh(x)} dx = \arctan(\sinh(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- (b) Calcula la correspondiente integral impropia o justifica si diverge:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\cosh(x)} dx.$$

- (c) **Utilizando el inciso anterior**, estudia la naturaleza de la siguiente serie, nombrando el criterio utilizado y verificando el cumplimiento de las hipótesis:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\cosh(n)}.$$

4. Estudia la naturaleza de cada una de las siguientes series, nombrando el criterio utilizado:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+3}\right)^{n^2}.$

- (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (n!)^2}{(2n)!}.$

5. Calcula el valor de cada una de las siguientes series o justifica si diverge:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-2n+2} 4^{n+1}.$

- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} [\tanh(n+1) - \tanh(n)].$

6. Determina, si existe, el siguiente límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n - \ln(ae^n + 1)], \quad a > 0.$$

Cada pregunta tiene el siguiente valor:

1(a)	1(b)	2	3(a)	3(b)	3(c)	4(a)	4(b)	5(a)	5(b)	6
0.75	0.75	1.5	1	0.5	0.5	1	1	1	1	1