Cálculo Diferencial e Integral III. Primavera 2021

Primer examen parcial departamental

Instrucciones:

i) Escribe tu NOMBRE y CU en la primera hoja de las respuestas.
ii) No se permite usar calculadoras.
iii) Cada pregunta vale lo mismo (1/8 cada una).
iv) Tendrás 10 minutos adicionales para preparar y enviar las respuestas a tu profesor, por lo que debes enviar las soluciones a más tardar a las 10:10 am.

Duración: 2 horas

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x(x-y)$ y sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x,y) = x+y$. Si Γ_1 es la curva de nivel de f correspondiente al valor 0, y Γ_2 es la curva de nivel de g que contiene al punto $(1,2)$, encuentra los puntos de intersección de Γ_1 con Γ_2.

2. Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es de la forma $f(x,y) = ax^2 + bxy + c$, donde a, b, c son constantes. Si el plano en el espacio xyz dado por la ecuación $z = 2x + 3y + 5$ es el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(1, 1, f(1,1))$, encuentra los valores de a, b, c.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + 3y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$. Demuestra que f no es continua en $(0,0)$.

4. Una partícula se mueve en el espacio xyz de tal manera que su posición al tiempo t es $\mathbf{r}(t) = (t^2-2t, t^3+t, 2t-1)$ para $t \leq 2$. Al tiempo $t = 2$ la partícula comienza a moverse sobre una línea recta en dirección del vector $\mathbf{r}'(2)$ y a velocidad constante (e igual a $\mathbf{r}'(2)$). Encuentra la posición de la partícula al tiempo $t = 4$.

5. Una curva en el plano xy está dada paramétricamente por $x = t^2 - t$, $y = 2t^3 + t$ para toda $t > 1/2$.

   (a) Encuentra $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ como función de t.

   (b) Encuentra el valor de $\dfrac{dy}{dx}$ en el punto $(6, 57)$ sobre la curva.

6. Sean $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dadas por $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2 - 2xy, x^3 + yz^2)$, $\mathbf{G}(x,y) = (x^2 + y^2, 2xy - y^2, x - e^{x-y})$. Encuentra $\mathrm{D}(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})(1,1)$.

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable, $f = f(x,y)$, tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 3$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1) = -4$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-2,3) = 4$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-2,3) = 2$. Si $w = f(x,y)$, $x = u^2 - 3uv$, $y = u + v^3$, encuentra el valor de $\dfrac{\partial w}{\partial v}$ cuando $u = 2$, $v = 1$.

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable, $f = f(u, v)$. Sea g función dada por $g(x, y) = f(x - y^2, y - xy)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Usa una composición de funciones y la *regla de la cadena* para demostrar que $\dfrac{\partial g}{\partial x} - \dfrac{\partial g}{\partial y} = (1 + 2y)\dfrac{\partial f}{\partial u} + (x - 1 - y)\dfrac{\partial f}{\partial v}$.