Cálculo Diferencial e Integral III. Otoño 2020

Primer examen parcial departamental.

Instrucciones:

i) Escribe tu NOMBRE y CU en la primera hoja de las respuestas.
ii) No se permite usar calculadoras.
iii) Cada pregunta vale lo mismo (1/9 cada una).
iv) Tendrás 10 minutos adicionales para preparar y enviar las respuestas a tu profesor, por lo que debes enviar las soluciones a más tardar a las 11:10 am.

Duración: 2 horas

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x, y) = ax^2 - y^3 + 3xy + b$. Encuentra valores de las constantes a, b tales que la gráfica de f pase por el punto $(1, -1, -1)$ y la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en dicho punto sea $z = x - 2$.

2. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 - y^2 + z, z^3 - 3xy + 2, x + 2y, z - xy)$. Calcula $\mathrm{D}\mathbf{F}(2, -1, 1)$.

3. Sea A una matriz de $n \times n$ con entradas reales. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $\mathbf{F}(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{x}$. Demuestra que la matriz jacobiana $\mathrm{D}\mathbf{F}(\vec{x})$ no depende de $\vec{x}$.

4. Dibuja la curva de nivel de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = x^3 - 4x$, correspondiente al valor 0.

5. Sean $\mathbf{G}(u, v) = (e^u, u + \operatorname{sen}(v))$ y $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, yz)$. Calcula $\mathrm{D}(\mathbf{G} \circ \mathbf{F})$ en $(0, 1, 0)$ **usando** la regla de la cadena.

6. Sea $\mathbf{u}(x, y, z) = (x, y, z)$ y sea $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\|\mathbf{u}(x, y, z)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Demuestra que $\nabla f = -\dfrac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^3}$.

7. Sea $z = x^2 - \dfrac{x}{y}$, $x = u^2 - v^2$, $y = 3u + v$. Encuentra el valor de $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ cuando $u = -1$, $v = 1$.

8. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y tal que $g'(-6) = 4$. Sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $h(x, y) = g(2x - xy^3)$. Encuentra $\nabla h(-2, -1)$.

9. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = 3x^2 - bxy + y^3$, donde b es constante. Encuentra el valor de b si f es tal que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2, 1 + h) - f(2, 1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-1 + h, 3) - f(-1, 3)}{h}$.