Primer examen parcial. Cálculo Diferencial e Integral III. Otoño 2019

Nombre: CU:

i) No se permite el uso de calculadoras.
ii) Cada pregunta vale lo mismo (1/9 cada una).
EXAMEN TIPO A. Duración: 2 horas

1. Sea $\mathbf{c}(t) = (t^3 - 3t, 2t + 1, 3t + 2)$, $t \in \mathbb{R}$, una trayectoria en $\mathbb{R}^3$. Encuentra una parametrización de la recta tangente a la curva descrita por la trayectoria en el punto $\mathbf{c}(1) = (-2, 3, 5)$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x, y) = x^2 - y^3 + 3xy - 1$. Encuentra la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(2, 1, 8)$.

3. Una curva en el plano xy está dada paramétricamente por $x = 3t + e^{2t-1}$, $y = t^2 - 2t^3$ para toda $t \in \mathbb{R}$. Encuentra $\dfrac{dy}{dx}$ como función de t.

4. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{F}(x, y, z, w) = (x^2 - y^2 + z - w, z^3 - 3xy + 2w^2)$. Calcula $\mathrm{D}\mathbf{F}(1, 2, -1, -2)$.

5. Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x, y) = x^2 - ay^2 + 5$, $g(x, y) = ax^2 + 2y$, donde a es una constante que se determina con la siguiente condición: El punto $(2, -1)$ pertenece tanto a una curva de nivel de f como a una curva de nivel de g correspondientes a un mismo valor. Encuentra el valor de a y encuentra el valor correspondiente de las dos curvas de nivel.

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = 3xy + by^2 - 6x^4$ con b constante. ¿Cuál es el valor de b si f es tal que $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(1, -2 + h) - f(1, -2)}{h} = -2$?

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^4 + y^4}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$. Justifica por qué f no es continua en $(0, 0)$.

8. Sea $z = x^2 - ye^{x-1}$, $x = uv^2 - u^2 - 2$, $y = v^2 + u$. Encuentra el valor de $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ cuando $u = 1$, $v = 2$ usando la regla de la cadena.

9. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable y tal que $f(x, y) = f(x, xy)$ para toda $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Sea $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{G}(x, y) = (x, xy)$. Notando que $f(x, y) = f \circ \mathbf{G}(x, y)$ para toda $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, aplica la regla de la cadena a $f \circ \mathbf{G}$ para demostrar que se cumplen las siguientes igualdades:

$$i) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, xy) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, xy), \quad ii) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x\frac{\partial f}{\partial y}(x, xy).$$