

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Laboratorio 14

Primavera 2021

Series de números reales. Criterios de convergencia. Convergencia absoluta y condicional. Series de potencias. Series de Taylor

1. Calcula las siguientes series:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{2n-1}}.$$

$$(b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2} + 3^{n+1}}{6^n}.$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \right).$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)}. \quad \text{Sugerencia: usa fracciones parciales.}$$

2. Estudia la convergencia de las siguientes series:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}.$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln \sqrt{n}}{n}.$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7} \right)^{1/n}.$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}.$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3! n! 3^n}.$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)^n.$$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} \tan \left(\frac{1}{2^n} \right).$$

3. Analiza si las siguientes series convergen absolutamente, convergen condicionalmente o divergen:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n^3}}.$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2 + 1}.$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\text{sen}(n)}{n^2}.$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3+n}{5+n}.$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}.$$

4. Determina para qué valores de α son absolutamente convergentes o divergentes las siguientes series:

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \text{sen } \alpha)^n.$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^\alpha + 1}.$$

5. Halla el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{\pi^{n+2}} x^{n+3}.$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3x+2)^n}{4^n(2n)}.$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)}$$

$$(d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}.$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-1)^n.$$

6. Considera la serie potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+a)^{n+1}}$, con $a > 0$. Determina a de modo que el radio de convergencia de la serie sea igual 3.

7. (a) Determina el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}$.

(b) Utilizando el inciso anterior, calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 3^n}{(2n)!}$.

8. Determina el valor exacto de $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Sugerencia: Deriva término a término la serie

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1).$$

9. Demuestra que $\tan^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Sugerencia: Usa $\tan^{-1}(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ e integra término a término la serie de potencias de $\frac{1}{1+t^2}$.

10. La serie de Taylor generada por $f(x) = e^x$ en $x_0 = 0$ es $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. A partir de esta información:

(a) Calcula $1 + \ln 2 + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \frac{(\ln 2)^3}{3!} + \frac{(\ln 2)^4}{4!} + \dots$

(b) Encuentra la serie de Taylor generada por $g(x) = e^{-2x^2}$ en $x_0 = 0$.

(c) Demuestra que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = 1$, con $\lambda > 0$ una constante.

11. La serie de Taylor generada por $f(x) = \ln(1+x)$ en $x_0 = 0$ es $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

A partir de esta información:

(a) Encuentra la serie de Taylor generada por $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ en $x_0 = 0$.

(b) Encuentra la serie de Taylor generada por $f(x) = x \ln(1+x^2)$ en $x_0 = 0$.

12. ¿Qué función tiene como serie de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (x-3)^n$? ¿Para qué valores de x es válido este desarrollo?

13. Considera la integral $\int_0^1 \text{sen}(x^2) dx$.

(a) Expresa la integral como una serie infinita.

(b) Determina el valor de la integral con un error menor que 10^{-4} .