CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 13
Primavera 2021
Sucesiones de números reales. Pruebas de convergencia para sucesiones

1. Calcula el límite de cada sucesión $\{a_n\}$ o justifica si ésta diverge:

   (a) $a_n = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2n^2}$.

   (b) $a_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}$.

   (c) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{2n}\right)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$.

   (d) $a_n = nr^n$, si $|r| < 1$ es fijo.

   (e) $a_n = \left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^n$.

   (f) $a_n = \dfrac{(-1)^n + 1}{n}$.

   (g) $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$.

   (h) $a_n = (\ln n)^{1/n}$. Sugerencia: $1 \leq \ln n \leq n$, para $n \geq 3$.

   (i) $a_n = (p(n))^{1/n}$, en donde $p(x) = b_0 + b_1 x^1 + \ldots + b_m x^m$ es un polinomio de grado m y $b_0, b_1, \ldots, b_m$, son reales positivos fijos.

2. Usa la prueba del cociente o la prueba de la raíz n-ésima para sucesiones (enunciadas al final de este laboratorio) para estudiar la naturaleza de las siguientes sucesiones $\{a_n\}$:

   (a) $a_n = n^5 e^{-n}$.

   (b) $a_n = \dfrac{5^n}{n!}$.

   (c) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

   (d) $a_n = \dfrac{n!\,n!}{(2n)!}$.

3. Demuestra que:

   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (1+\alpha^n)^{1/n} = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < \alpha \leq 1, \\ \alpha & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$

   (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max(a,b), \quad a, b > 0.$

4. Sea $I_n = \int_0^1 (\ln x)^n \, dx$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Demuestra que $I_n = (-1)^n \, n!$ Sugerencia: integra por partes y calcula la integral impropia usando la regla de L'Hopital.

5. Demuestra que toda sucesión convergente está acotada.

6. Prueba rigurosamente (ε y N) que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2}{1+n^2} = 4$.

Prueba del cociente para sucesiones. Si $\{a_n\}$ es una sucesión de reales positivos tales que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$ y si $0 \leq L < 1$, entonces $\{a_n\}$ converge y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Prueba de la raíz n-ésima para sucesiones. Si $\{a_n\}$ es una sucesión de reales no negativos tales que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ y si $0 \leq L < 1$, entonces $\{a_n\}$ converge y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.