Cálculo Diferencial e Integral III. Primavera 2021

Laboratorio 11 : Teoremas de la Función Implícita e Inversa

1. El punto $(x_0, y_0, z_0) = (-2, -1, 2)$ satisface la ecuación $x^2 - xy + z^2y^2 - 6 = 0$.

   (a) Usa el teorema de la función implícita para mostrar que la variable x puede ser escrita de manera única en términos de las variables y, z para (y, z) en alguna vecindad de $(-1, 2)$, x en algún intervalo abierto que contiene a -2.

   (b) Encuentra una representación explícita para x en términos de y, z de la forma $x = g(y, z)$ con g de clase C^1 en algún abierto que contiene a $(-1, 2)$ y tal que $-2 = g(-1, 2)$.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y tal que $f(1) = 2$. Dado el sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
f(x - 2z) + yz - 4 &= 0 \qquad (1)\\
yf(z) + x - 7 &= 0, \qquad (2)
\end{aligned}
$$

   encuentra condiciones en $f'(1)$ para que el sistema se pueda resolver (no de forma explícita necesariamente) de manera única para x y para z en términos de y con y en algún intervalo abierto que contiene a 2, x en algún abierto que contiene a 3, z en algún abierto que contiene a 1.

3. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{F}(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \operatorname{sen}(y))$.

   (a) Muestra que $\mathbf{F}$ es localmente invertible alrededor de cualquier punto en $\mathbb{R}^2$, pero no es invertible en todo $\mathbb{R}^2$.

   (b) Notar que $\mathbf{F}(0, \pi/4) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ y que existen abiertos U, V que contienen a $(0, \pi/4)$ y a $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ respectivamente tales $\mathbf{F} : U \to V$ es invertible. Si $\mathbf{G}$ es la inversa de dicha función, calcula $\mathrm{D}\mathbf{G}(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ sin calcular explícitamente la función G.

4. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - xy, y + xy)$. Dibuja en el plano xy el conjunto de puntos (x_0, y_0) para los cuales el teorema de la función inversa garantiza que $\mathbf{F}$ es inyectiva en algún abierto que contiene a (x_0, y_0).

5. Dado el sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
xy^2 + xzu + yv^2 &= 3 \qquad (3)\\
u^3yz + 2xv - u^2v^2 &= 2, \qquad (4)
\end{aligned}
$$

   (a) Muestra que este sistema define de manera implícita funciones de clase C^1 $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, para todo (x, y, z) en algún abierto que contiene a $(1, 1, 1)$, con $1 = u(1, 1, 1)$ y $1 = v(1, 1, 1)$.

   (b) Encuentra el valor de $\dfrac{\partial v}{\partial y}(1, 1, 1)$.

6. El punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 2)$ está en las superficies S_1 y S_2 en el espacio xyz descritas por $x^2(y^2 + z^2) = 5$, $(x - z)^2 + y^2 = 2$ respectivamente. Muestra que cerca de dicho punto, la curva formada por la intersección de S_1 con S_2 puede ser descrita por un par de ecuaciones de la forma $z = f(x)$, $y = g(x)$ con f y g de clase C_1.

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y tal que $f(0, 0) = 0$. Encuentra condiciones sobre $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ que permitan resolver de manera única la ecuación $f(f(x, y), y) = 0$ para la variable y como función de x, con x en una vecindad de 0, y y en una vecindad de 0.