

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Laboratorio 9

Primavera 2021

Integrales trigonométricas. Sustituciones trigonométricas

1. Encuentra las siguientes integrales:

(a) $\int \operatorname{sen}^5(x) dx$.

(b) $\int \operatorname{senh}^3(x) \operatorname{cosh}^2(x) dx$.

(c) $\int \tan^5(x) \sec^4(x) dx$.

(d) $\int \tan^3(x) \sec^5(x) dx$.

(e) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} dx$

(f) $\int \operatorname{csc}^3(x) dx$.

(g) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^3(x) dx$.

(h) $\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}} dx$.

2. Demuestra que para $m, n \in \mathbb{N}$:

(a) $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(mx) \cos(nx) dx = 0$.

(b) $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m \\ \pi, & \text{si } n = m. \end{cases}$

3. Utiliza una sustitución trigonométrica para determinar las siguientes integrales:

(a) $\int \frac{x^2}{\sqrt{21 + 4x - x^2}} dx$.

(b) $\int x^2 \operatorname{sen}^{-1}(x) dx$.

(c) $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{4x^2}{(1-x^2)^{3/2}} dx$.

(d) $\int_2^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx$.

(e) $\int_0^{\ln 4} \frac{e^t dt}{\sqrt{e^{2t} + 9}}$.

4. Usando la sustitución $u = \sec(x)$ demuestra que

$$\int \sec(x) dx = \ln |\sec(x) + \tan(x)| + C.$$

5. Utiliza una sustitución trigonométrica para demostrar que

$$\int \sqrt{a-bx^2} dx = \frac{x\sqrt{a-bx^2}}{2} + \frac{a}{2\sqrt{b}} \operatorname{sen}^{-1} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} x \right) + C, \quad 0 < b < a.$$