CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 8
Primavera 2021
Integración por partes

1. Encuentra las siguientes integrales:

   (a) $\displaystyle\int \frac{x\,2^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,dx.$

   (b) $\displaystyle\int_0^a \frac{t}{e^{t/a}}dt, \;\; a > 0.$

   (c) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}dx.$

   (d) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x^2}dx.$

   (e) $\displaystyle\int \cos\left(\sqrt{5x+3}\right)\;dx.$

   (f) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{-1}(3x)\,dx.$

   (g) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx.$

   (h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^3}\,dx.$

2. Utilizando una integración por partes demuestra las siguientes fórmulas de reducción de grado:

   (a)
   $$\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx, \text{ con } a \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

   (b)
   $$\int \operatorname{sen}^n(x)\,dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x) + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\,dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

3. Demuestra que
$$\int_a^b \left(\int_x^b f(t)dt\right) dx = \int_a^b (x-a)\,f(x)dx.$$

4. (a) Demuestra que

$$\int f(x)\, dx = xf(x) - \int xf'(x)dx.$$

(b) Si f y g son funciones inversas, y si f' es continua, demuestra que

$$\int_a^b f(x)\, dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy.$$

Sugerencia: usa 4a.

(c) Aplica el resultado del inciso anterior para evaluar

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \operatorname{sen}^{-1}(x)\; dx.$$

5. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable, tal que

$$f''(x) = -\frac{3}{x^4} \cosh\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^5} \operatorname{senh}\left(\frac{1}{x}\right)$$

para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(1) = \cosh(1)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. Demuestra que

$$f(x) = -\frac{1}{x} \operatorname{senh}\left(\frac{1}{x}\right) + \cosh\left(\frac{1}{x}\right).$$