

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Laboratorio 7

Primavera 2021

Formas indeterminadas

1. Sin utilizar la regla de L'Hopital prueba que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1}(x)}{x} = 1 \quad (\text{cambia variable}).$$

2. Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha_1 \sinh\left(\frac{x}{1-x}\right), & \text{si } x < 0 \\ \alpha_2 + \tan^{-1}(x), & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

en donde α_1 y α_2 son constantes reales. Determina α_1 y α_2 de modo que la función f sea continua y diferenciable en \mathbb{R} .

3. Sea f una función continua en \mathbb{R} y

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Demuestra que F es continua en el punto $x = 0$.
(b) ¿En qué condiciones se puede garantizar que F es diferenciable en el punto $x = 0$?

4. Calcula, si existen, los siguientes límites:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin(\pi x)}$.
(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x + x^2/2}{x^3}$.
(c) $\lim_{a \rightarrow 1} \frac{x^{1-a} - 1}{1-a}$, $x > 0$.
(d) $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \frac{\sec(\theta)}{\tan(\theta)}$.
(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(-1/x^2)}}{x}$.
(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 4^x}{5^x - 2^x}$.
(g) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right)$.
(h) $\lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(1+6x) - \ln(4+3x)]$.

- (i) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2\sqrt{x} [\pi - 2 \tan^{-1}(\sqrt{x})])$.
- (j) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln(3e^x + 1))$.
- (k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a^{1/x} + b^{1/x}}{2} \right)^x$, $a > 0, b > 0$.
- (l) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(x))^{\cot(x)}$.

5. Sea f una función continua en \mathbb{R} . Demuestra que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \int_0^{1/x} f(t) dt \right)^x = e^{f(0)}.$$

6. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = xe^{1/x}$.

- (a) Determina $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.
- (b) Determina los intervalos de monotonía, extremos, concavidades y puntos de inflexión de f .
- (c) Dibuja la gráfica de f .