CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 6
Primavera 2021
Funciones hiperbólicas inversas y funciones trigonométricas inversas

1. A partir de las definiciones de las funciones $\cosh(x)$ y $\tanh(x)$ muestra que

   (a) $\cosh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad x \geq 1.$

   (b) $\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1.$

2. Determina el dominio, la imagen y la derivada de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = \cosh^{-1}(2\sqrt{1-x}).$

   (b) $f(x) = \tanh^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x.$

3. Las funciones $\tanh^{-1}(x)$ y $\coth^{-1}(x)$ tienen la misma derivada, $\dfrac{1}{1-x^2}$. ¿Por qué no difieren en una constante?

4. Calcula las siguientes integrales y escribe tu respuesta en términos del logaritmo natural:

   (a) $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}.$

   (b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}.$

5. Halla una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$, efectuando el cambio de variable $x = \cosh(t)$.

6. Simplifica la expresión $\sec\left(\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{x}\right)$.

7. Prueba que

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right), \quad \text{si } 0 < |x| \leq 1.$$

   Sugerencia: Dibuja un triángulo o deriva ambos lados de la igualdad.

8. Halla el dominio de cada función y luego encuentra su derivada:

   (a) $f(x) = \sec^{-1}(\ln x).$

   (b) $f(x) = 3\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{x^2-1}).$

9. Considera la función definida por $f(x) = -\pi + \cos^{-1}(1 - \ln x)$.

   (a) Determina: (i) el dominio de f, (ii) la imagen de f, (iii) los ceros de f, (iv) las soluciones de la ecuación $f(x) = -\pi$.

   (b) Demuestra que f es inyectiva.

   (c) Caracteriza la función inversa de f (dominio, imagen y regla de correspondencia).

   (d) Esboza la gráfica de f.

10. Sea

$$f(x) = \int_0^{1/x} \frac{1}{t^2+1}\, dt + \int_0^{x} \frac{1}{t^2+1}\, dt, \quad \text{con } x > 0.$$

   (a) Sin resolver la integral, demuestra que f es constante.

   (b) Resolviendo la integral, demuestra que la constante es $\pi/2$. Sugerencia: $\cot^{-1}(x) = \tan^{-1}(1/x)$.

11. Determina las siguientes integrales:

   (a) $\int_1^e \dfrac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$.

   (b) $\int_{-2}^{2\sqrt{3}-2} \dfrac{dx}{x^2+4x+8}$.

   (c) $\int_{-b}^{-b/2} \dfrac{dx}{\sqrt{-2bx - x^2}}$, $b > 0$.

12. Determina una primitiva de la función $f(x) = \sec(x)$, efectuando el cambio de variable $t = \operatorname{sen}(x)$. (Sugerencia: Integra usando la sustitución indicada y luego utiliza el ejercicio 1b.)

13. (a) Prueba que

$$\int \operatorname{sech}(x)\, dx = \tan^{-1}(\operatorname{senh}(x)) + C.$$

   Sugerencia: $\int \operatorname{sech}(x)\, dx = \int \dfrac{1}{\cosh(x)}\, dx = \int \dfrac{\cosh(x)}{\cosh^2(x)}\, dx$.

   (b) Prueba también que

$$\int \operatorname{sech}(x)\, dx = \operatorname{sen}^{-1}(\tanh(x)) + C. \quad \text{(Derivar.)}$$