CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 5
Primavera 2021
Logaritmos y exponenciales en otras bases. Funciones hiperbólicas

1. En cada una de las siguientes expresiones despeja y:

   (a) $\log_3 (1-y) - \log_3 (y) - x = 0, \quad 0 < y < 1.$

   (b) $\dfrac{5^y - 5^{-y}}{2} = 3.$

2. Encuentra el dominio y la derivada de la función en cada inciso:

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{\log_2(\log_2 x)}.$

   (b) $y = \log_3 \left(\dfrac{3^x}{1-3^x} \right).$

   (c) $y = (2^x + 1)^{1/x}.$

   (d) $y = x^x (\ln x)^{\ln x}.$

   (e) $y = (\ln x)^x + 2^{1/x}.$

3. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 1$, si

$$f(x) = \int_3^{1+2^x} \frac{\log_2(t-1)}{t-1} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. Determina las siguientes integrales:

   (a) $\displaystyle\int e^x \, 10^x \, dx.$

   (b) $\displaystyle\int_{1/10}^{10} \frac{\log_{10}(x)}{x} dx.$ Simplifica la respuesta.

   (c) $\displaystyle\int_0^{\log_3 2} \frac{1}{1+3^x} dx.$ Simplifica la respuesta.

5. Demuestra que para todo $x \in \mathbb{R}$:

   (a) $e^x = \cosh(x) + \operatorname{senh}(x).$

   (b) $(\cosh(x) + \operatorname{senh}(x))^n = \cosh(nx) + \operatorname{senh}(nx).$

6. Determina el dominio y la derivada de la función en cada inciso:

   (a) $f(x) = \coth(\ln x)$.

   (b) $f(x) = \cosh^2(\sqrt{2 - e^x})$.

7. Sean

$$A(\theta) = \frac{1}{2}\text{sen}\,(\theta)\cos(\theta) + \int_{\cos(\theta)}^{1} \sqrt{1 - t^2}\,dt, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

   y

$$B(x) = \frac{1}{2}\text{senh}\,(x)\cosh(x) - \int_{1}^{\cosh(x)} \sqrt{s^2 - 1}\,ds, \quad x \geq 0.$$

   Prueba que $A(\theta) = \dfrac{\theta}{2}$ para todo θ y $B(x) = \dfrac{x}{2}$ para todo x. (Sugerencia: $A'(\theta) = \dfrac{1}{2}$ y $B'(x) = \dfrac{1}{2}$ por la regla de Leibniz.)

8. Determina las siguientes integrales y simplifica la respuesta:

   (a) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^{-x}\text{senh}\,(x)\ dx$.

   (b) $\displaystyle\int_0^{\ln 10} 4\,\text{senh}^2\left(\frac{x}{2}\right)\ dx$.

   (c) $\displaystyle\int_{-\ln 3}^{\ln 3} \sqrt{1 + \cosh(x)}\,dx$.