CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 4
Primavera 2021
Funciones inversas. Función exponencial.

1. En cada inciso, encuentra un intervalo en el que f tenga una inversa (halla un intervalo en el que $f' > 0$ o $f' < 0$). No es necesario encontrar f^{-1}.

   (a) $f(t) = t^4 + 2t^2 + 1$.

   (b) $f(x) = \int_{x^2}^{x} \ln t \; dt, \;\; 0 < x < 1$.

2. Sea $f(x) = x^3 + x - 1$.

   (a) Muestra que f es creciente y diferenciable en $\mathbb{R}$.

   (b) Calcula $\dfrac{d}{dx} f^{-1}(9)$. (Observa que $f(2) = 9$.)

3. Determina la derivada y' en cada inciso:

   (a) $y = \dfrac{1}{e^{2x} \ln x}$.

   (b) $y = \int_{1}^{e^{(x^2)}} \ln^2\left(\sqrt{t}\right) \; dt$. Simplifica la respuesta.

   (c) $e^{xy} + y = 2$.

4. Sea $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

   (a) Encuentra el dominio de f.

   (b) Encuentra $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to (-\infty)} f(x)$.

   (c) Determina los intervalos de monotonía, concavidad, valores extremos, puntos de inflexión y asíntotas.

   (d) Grafica la función f.

5. Sea $k \in \mathbb{R}$ y considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} + 2k - \dfrac{1}{2}, & \text{si } x > 0 \\ k, & \text{si } x = 0 \\ \left(k^2 + \dfrac{k}{2}\right) \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

   (a) Determina k de modo que f sea continua en $x = 0$.

   (b) Demuestra que para todo $x > 0$, $e^{-1/x^2} \in (0, 1)$.

   (c) Para $k = 1/2$ define la inversa de la restricción de f a $\mathbb{R}^+$.

6. Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x - \alpha| e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2}}$, en donde α es una constante real.

   (a) Determina el dominio de diferenciabilidad de f y calcula f'.

   (b) Estudia la monotonía y extremos relativos de f.

   (c) Indica, justificando, si f admite máximos y mínimos absolutos.

   (d) Justifica que f restringida al intervalo $(\alpha+1, \infty)$ es invertible e indica el dominio de la respectiva función inversa. Calcula la derivada de la función inversa en el punto $f(\alpha + 2)$.

7. Sea $f > 0$ una función continua en el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y diferenciable en (a, b). Demuestra que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}.$$

8. Determina la integral en cada inciso:

   (a) $\displaystyle\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx.$

   (b) $\displaystyle\int_{-\ln 3}^{0} \sqrt{e^x} dx.$

   (c) $\int_0^{\ln 2} \dfrac{1}{e^x + 1} dx.$