CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 3
Primavera 2021
La función logaritmo natural

1. Proporciona el dominio de cada función y luego encuentra su derivada:

   (a) $f(x) = (\ln x)\ln(\operatorname{sen} x)$.

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x} + \ln(1/x)$.

   (c) $f(x) = \dfrac{\ln(\ln x)}{x \ln x}$.

   (d) $f(x) = \ln^2\left(\dfrac{3x+2}{x^4}\right)$.

   (e) $f(x) = \int_0^x \ln\left(x^{3/2}\right)\left(\dfrac{1+t^4}{t^3+2}\right) dt$.

2. Determina una función diferenciable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea par, con $f(0) = 0$ y tal que

$$\ln(1 + f(x)) = \int_0^{x^2} \frac{\operatorname{sen}(t)}{1 + f(\sqrt{t})}\, dt, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

3. Sea $L : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función tal que

$$L(xy) = L(x) + L(y)$$

   y

$$\lim_{t \to 0} \frac{L(1+t)}{t} = 1. \quad (*)$$

   Prueba que $L(x) = \ln x$, para todo $x > 0$.

   Sugerencia: Prueba que $L(1) = 0$ y usa (*) para demostrar que $L'(x) = 1/x$.

4. (a) Prueba que si $t \geq 1$, entonces $\dfrac{1}{t} < \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, y de aquí obtén que

$$0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x} - 2, \quad \text{para toda } x \geq 1.$$

   (b) Concluye que $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. (Usa el teorema del sandwich).

5. Utiliza derivación logarítmica para encontrar la derivada de la función

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{(x^2+1)^{5/2}\sqrt{2 + \operatorname{sen} x}}.$$

6. Determina las siguientes integrales:

   (a) $\int_e^{e^2} \dfrac{dx}{x \ln x}$. (Observa que $\ln e = 1$.)

   (b) $\int_0^x \dfrac{t}{\sqrt{1+t}}\, dt$, con $x \geq 0$.

   (c) $\int \dfrac{1}{3 + x^{1/3}}\, dx$.