CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Laboratorio 2

Primavera 2021

Teorema Fundamental del Cálculo. Integral por sustitución.

1. Halla la derivada de la función en cada inciso (sin integrar):

   (a) $G(x) = \int\limits_{x}^{1} \sqrt{1+t^4}\, dt.$

   (b) $G(x) = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1+t^4}\, dt.$

   (c) $G(x) = \int\limits_{0}^{1} x^2\sqrt{1+t^4}\, dt.$

   (d) $G(x) = \int\limits_{0}^{x} x^2\sqrt{1+t^4}\, ds.$

   (e) $G(x) = \int\limits_{-2x}^{2x} \sqrt{1+t^4}\, dt.$

   (f) $G(t) = \displaystyle\int_{t^2}^{t^4} \frac{t^2}{1+\sqrt{x}}\, dx.$

2. Determina la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \displaystyle\int_{\pi/2}^{x} x\frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$ en $x = \frac{\pi}{2}$ para estimar el valor de $f(\frac{\pi}{2} + 0.1)$.

3. Para $\theta \in (\pi/2, \pi/2)$ define

$$S(\theta) = \int\limits_{0}^{\operatorname{sen}\theta} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

   Usa la regla de Leibniz para probar que $S'(\theta) = 1$ para todo $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Concluye que $S(\theta) = \theta$ para todo $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

4. Sean g diferenciable en $\mathbb{R}$, f continua en $\mathbb{R}$ y

$$h(x) = x^2 \int_{g(x)}^{g(x^3)} f(t)dt.$$

   (a) Justifica que h es diferenciable y calcula su derivada.

   (b) Si f y g son impares, justifica si h es una función par, una función impar, o ninguna de éstas.

5. Calcula $f(2)$, si f es continua y satisface la fórmula dada para todo $x \geq 0$:

$$\int_0^{x^2} f(t)dt = x^2(1+x).$$

6. Sea f continua en $[a,b]$. Demuestra que existe $x \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_x^b f(t)\,dt.$$

Sugerencia: Considera la función $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_x^b f(t)\,dt$.

7. Calcula el siguiente límite (sin usar la regla de L'Hopital):

$$\lim_{x \to 1} \frac{x}{x-1} \int_1^x \frac{t^2}{t^4+1}\,dt.$$

Sugerencia: Usa $F'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{F(x) - F(1)}{x-1}$ y aplica el TFC.

8. Determina las siguientes integrales indefinidas:

   (a) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}$.

   (b) $\int \sqrt{\dfrac{x-1}{x^5}}dx$. Sugerencia: $\sqrt{\dfrac{x-1}{x^5}} = \dfrac{1}{x^2}\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$

9. Calcula las siguientes integrales usando el teorema del cambio de variable para integrales definidas (haz una sustitución y cambia los límites de integración):

   (a) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen}|\pi - 2x|\ dx$.

   (b) $\int\limits_{\pi/8}^{\pi/4} \dfrac{\cos(2\theta)}{\operatorname{sen}^3(2\theta)}\,d\theta$.

   (c) $\int\limits_1^x \dfrac{t^2}{\sqrt{t^3+3}}\,dt$, con $x \geq 1$.

   (d) $\int\limits_0^3 \dfrac{t}{\sqrt{1+t}}\,dt$.

10. Sea f continua en el intervalo $[a,b]$ y sea $\lambda \neq 0$ una constante. Usa el teorema del cambio de variable para integrales definidas para demostrar:

   (a) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+\lambda}^{b+\lambda} f(x-\lambda)dx.$

   (b) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a}^{\lambda b} f\left(\frac{x}{\lambda}\right)\,dx.$