Examen Final

Cálculo Diferencial e Integral II

Departamento de Matemáticas, ITAM

18 de diciembre de 2020

Duración total (resolución y entrega):
16:00 a 18:45 hrs

Lee cuidadosamente las instrucciones:

1. Envía tus respuestas en formato pdf. En la primera hoja escribe tu nombre y C.U.
2. Presenta tus soluciones en el orden de numeración de las preguntas.
3. Contesta con claridad y limpieza.
4. Simplifica la respuesta en la medida de lo posible.
5. Muestra el trabajo completo y detallado. Una respuesta sin justificación se considerará no contestada.

El profesor se reserva el derecho de llamar a consulta a todos los alumnos sospechosos de haber cometido fraude de cualquier tipo durante el examen, para aclarar que el alumno es responsable de todos sus procedimientos.

Cálculo Diferencial e Integral II
Examen Final

1. Estudia la convergencia de las siguientes series. Enuncia claramente el criterio que utilizas y verifica las hipótesis:

   (a) (**1.25 ptos.**) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^{n^2}}$. **Usa la prueba de la integral**.

   (b) (**1 pto.**) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$. (Usa propiedades del logaritmo.)

   (c) (**1 pto.**) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

2. Considera la sucesión $\displaystyle I_n = \int_1^{\infty} \left(\frac{n}{x} - \frac{n^2}{1+nx}\right) dx$.

   (a) (**1.25 ptos.**) Demuestra, justificando con detalle, que
   $$I_n = n\ln\left(\frac{1+n}{n}\right).$$

   (b) (**0.75 ptos.**) Calcula $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$.

3. (**1.25 ptos.**) Demuestra, detalladamente, que
$$\left| e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right)\right| < \frac{1}{6}, \quad \forall\, x \in [0,1].$$

4. (**1.25 ptos.**) Halla el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

5. (**1 pto.**) ¿Para qué valores de p la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{np}}$ converge a 7?

6. (**1.25 ptos.**) Encuentra $F'(x)$ (no es necesario justificar las hipótesis del Teorema Fundamental del Cálculo):
$$F(x) = e^{-9x^2} \int_0^{3x} e^{t^2} dt. \quad \text{Simplifica el resultado.}$$