Segundo Examen Departamental

Cálculo Diferencial e Integral II

Departamento de Matemáticas, ITAM

13 de noviembre de 2020

Duración total (resolución y entrega):
19:00 a 21:45 hrs

Lee cuidadosamente las instrucciones:

1. Envía tus respuestas en formato pdf. En la primera hoja escribe tu nombre y C.U.
2. Presenta tus soluciones en el orden de numeración de las preguntas.
3. Contesta con claridad y limpieza.
4. Muestra el trabajo completo y detallado. Una respuesta sin justificación se considerará no contestada.
5. Simplifica la respuesta en la medida de lo posible.

El profesor se reserva el derecho de llamar a consulta a todos los alumnos sospechosos de haber cometido fraude de cualquier tipo durante el examen, para aclarar que el alumno es responsable de todos sus procedimientos.

Cálculo Diferencial e Integral II
Segundo Examen Departamental

1. (**1.5 ptos.**) Efectúa el siguiente límite para encontrar un valor de $a \in \mathbb{R}$ que satisfaga la igualdad, o justifica si esto no es posible:

$$\lim_{x\to\infty} \left(a^{1/x} + \frac{1}{x}\right)^x = 3.$$

2. (**1.5 ptos.**) Determina $\displaystyle\int \frac{dx}{x - 2x^{r+1}}$, $r \neq 0$. Usa la sustitución $u = x^r$.

3. (**1.5 ptos.**) Determina $\int \sqrt{e^{2x} - 9}\, dx$. Usa una sustitución trigonométrica e ilustra tu sustitución con un triángulo.

4. (**1.5 ptos.**) Halla el área de la región entre las curvas $y = \tan(x)$ y $y = \sec(x)$, en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Grafica las curvas y observa que se trata de una integral impropia.

5. (**1 pto.**) Sea $f(x)$ una función que admite derivada continua hasta el orden 2, tal que $f(1) = 1$, $f'(1) = 1$ y $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = 4$. Haciendo uso de esta información, calcula el valor de $\displaystyle\int_0^1 x^2 f''(x)\, dx$.

6. Sea $I = \displaystyle\int_0^\infty f(x)\, dx$, con

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   (a) (**0.75 ptos.**) Demuestra que f es continua en $x = 0$ y que I es impropia sólo del primer tipo.

   (b) (**0.5 ptos.**) Prueba que

$$\int_1^b \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = -\left.\frac{\cos x}{x}\right|_1^b - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2}\, dx.$$

   (c) (**1 pto.**) Usa el inciso anterior para probar que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$ converge. Puedes argumentar usando teoremas.

   (d) (**0.75 ptos.**) Justica con todo detalle que I converge.