Primer Examen Departamental

Cálculo Diferencial e Integral II

Departamento de Matemáticas, ITAM

2 de octubre de 2020

Duración total (resolución y entrega):
19:00 a 21:30 hrs

Lee cuidadosamente las instrucciones:

1. Envía tus respuestas en formato pdf. En la primera hoja escribe tu nombre y C.U.
2. Presenta tus soluciones en el orden de numeración de las preguntas.
3. Contesta con claridad y limpieza.
4. Muestra el trabajo <u>completo y detallado</u>. Una respuesta sin justificación se considerará no contestada.
5. Simplifica la respuesta en la medida de lo posible.

El profesor se reserva el derecho de llamar a consulta a todos los alumnos sospechosos de haber cometido fraude de cualquier tipo durante el examen, para aclarar que el alumno es responsable de todos sus procedimientos.

Cálculo Diferencial e Integral II
Primer Examen Departamental

1. (**1.5 ptos.**) Encuentra el valor de la constante $a > 0$ y la función $f(x)$ que satisfacen

$$a + \int_a^{x^2} \frac{f(t)}{t}\, dt = e^x + x^2 - e, \quad x \in (0, \infty).$$

2. Sean g diferenciable en $\mathbb{R}$, f continua en $\mathbb{R}$ y

$$h(x) = \int_{g(x)}^{g(x^3)} x^2 f(t) dt.$$

   (a) (**1.5 ptos.**) Justifica que h es diferenciable y calcula su derivada.

   (b) (**0.5 ptos.**) Si f y g son impares, justifica si h es una función par, una función impar, o ninguna de éstas.

3. (**1.25 ptos.**) Sea $f(x) = \left(\dfrac{2^x + 1}{2^x - 1}\right)^x$, $x > 0$. Calcula $f'(1)$ y simplifica el resultado.

4. (**1.25 ptos.**) Calcula $\displaystyle\int_1^{\cosh(4)} \sqrt{x^2 - 1}\, dx$, **usando la sustitución** $u = \cosh^{-1}(x)$, $x \geq 1$.

5. (**1 pto.**) Determina $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 4x - 4x^2}}$.

6. Considera la función definida por

$$f(x) = 1 + \cosh^{-1}\left(3 - \ln(2x)\right).$$

   (a) (**0.75 ptos.**) Determina el dominio y la imagen de f.

   (b) (**0.5 ptos.**) Demuestra que f es monótona y por tanto posee una inversa.

   (c) (**0.75 ptos.**) Caracteriza la función inversa de f (dominio, imagen y forma funcional).

7. (**1 pto.**) Resuelve en $\mathbb{R}$ la ecuación

$$2^{\ln[\operatorname{senh}(x)] + \ln[\cosh(x)]} = 4^{\ln\left(\sqrt{e}\right)}.$$