CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 15
Otoño 2020
Series de números reales. Criterios de convergencia. Convergencia absoluta y condicional. Series de potencias. Series de Taylor

1. Calcula las siguientes series:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{2n-1}}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}+3^{n+1}}{6^n}$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n+1]{n+1}-\sqrt[n]{n}\right)$.

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)}$. Sugerencia: usa fracciones parciales.

2. Estudia la convergencia de las siguientes series:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\sqrt{n}}{n}$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^{1/n}$.

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}$.

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3!\; n!\; 3^n}$.

   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n$.

   (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

3. Analiza si las siguientes series convergen absolutamente, convergen condicionalmente o divergen:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2}$.

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3+n}{5+n}$.

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$.

4. Determina para qué valores de α son absolutamente convergentes o divergentes las siguientes series:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1+\operatorname{sen}\alpha)^n$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^\alpha+1}$.

5. Halla el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{\pi^{n+2}} x^{n+3}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{(3x+2)^n}{4^n(2n)}$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$.

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-1)^n$.

6. Considera la serie potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+a)^{n+1}}$, con $a>0$. Determina a de modo que el radio de convergencia de la serie sea igual 3.

7. (a) Determina el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}$.

   (b) Utilizando el inciso anterior, calcula $\lim_{n \to \infty} \frac{(n!)^2\, 3^n}{(2n)!}$.

8. Determina el valor exacto de $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

   Sugerencia: Deriva término a término la serie

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1).$$

9. Demuestra que $\tan^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

   Sugerencia: Usa $\tan^{-1}(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ e integra término a término la serie de potencias de $\frac{1}{1+t^2}$.

10. La serie de Taylor generada por $f(x) = e^x$ en $x_0 = 0$ es $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. A partir de esta información:

    (a) Calcula $1 + \ln 2 + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \frac{(\ln 2)^3}{3!} + \frac{(\ln 2)^4}{4!} + \dots$

    (b) Encuentra la serie de Taylor generada por $g(x) = e^{-2x^2}$ en $x_0 = 0$.

    (c) Demuestra que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = 1$, con $\lambda > 0$ una constante.

11. La serie de Taylor generada por $f(x) = \ln(1+x)$ en $x_0 = 0$ es $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

    A partir de esta información:

    (a) Encuentra la serie de Taylor generada por $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ en $x_0 = 0$.

    (b) Encuentra la serie de Taylor generada por $f(x) = x \ln(1+x^2)$ en $x_0 = 0$.

12. ¿Qué función tiene como serie de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (x-3)^n$? ¿Para qué valores de x es válido este desarrollo?

13. Considera la integral $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)dx$.

(a) Expresa la integral como una serie infinita.

(b) Determina el valor de la integral con un error menor que 10^{-4}.