Cálculo Diferencial e Integral III. Otoño 2020

Taller 14: Integrales Triples

1. Encuentra el valor de $a > 0$ tal que $\iiint_{D_a} (x + y + z)dxdydz = 64$, donde D_a es el paralelepípedo en el espacio xyz dado por $[0, a] \times [0, 2a] \times [0, a]$.

2. Sea D la región sólida en $\mathbb{R}^3$ acotada por las superficies $y = x^2$, $y = -x^2 + 2x$, $z = 0$, $z = x^2 + y$. Escribe $\iiint_D f(x, y, z)dxdydz$ como una integral triple iterada.

3. Sea D la región sólida en $\mathbb{R}^3$ acotada por las superficies $y = x^2$, $y = x$, $z = 0$, $z = 2x$. Encuentra el valor de $\iiint_D ydxdydz$.

4. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua con $f \geq 0$. El sólido de revolución generado al rotar alrededor del eje x la región delimitada por la curva $y = f(x)$, el eje x, y las rectas $x = a$, $x = b$, está dado por

   $$D = \{(x, y, z) \mid x \in [a, b], \quad -f(x) \leq y \leq f(x), \quad -\sqrt{(f(x))^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{(f(x))^2 - y^2}\}.$$

   Usa la igualdad $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - y^2}dy = \frac{\pi r^2}{2}, \forall r \geq 0$, para mostrar que el volumen de D, dado por la integral $\iiint_D 1dxdydz$, es igual a $\pi \int_a^b (f(x))^2dx$.

5. Encuentra el valor de $\iiint_D (2z + \sqrt{x^2 + y^2})dxdydz$, donde $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, z \in [0, 1]\}$.

6. Encuentra el valor de $\iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dxdydz$, donde $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \ x \leq 0, \ y \leq 0, \ z \geq 0\}$.

7. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(u, v, w) = (u + v, v - 2w, u - w)$. Sea $D^* = [0, 1] \times [-2, 0] \times [0, 1]$. Encuentra el valor de $\iiint_D (x - y + z)\, dxdydz$, donde $D = T(D^*)$.