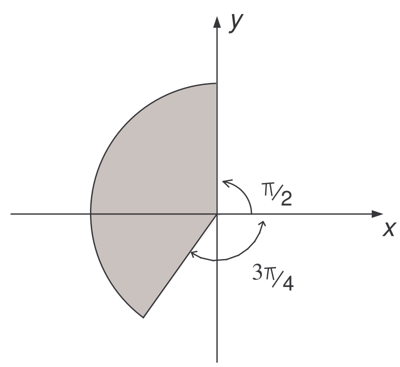
Taller 13. Cálculo Diferencial e Integral III. Otoño 2020

Integrales dobles, cambio de variables, teorema del valor medio

1. Sea D la región en el plano xy encerrada por el paralelogramo con vértices $(0,0)$, $(2,-1)$, $(3,4)$ y $(5,3)$. Encuentra el valor de $\iint_D (-x+3y)dxdy$ haciendo un cambio de variables tal que el dominio de integración sea el cuadrado $[0,1]\times[0,1]$.
2. Sea $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ diferenciable y tal que $T(u,v)=(u^2-3v,uv+2v^2)$. Suponer que D_1 y D_2 son dos regiones planas acotadas tales que $T(D_2)=D_1$ con T inyectiva en D_2. Reescribe $\iint_{D_1} ye^{x^2}dxdy$ como una integral de la forma $\iint_{D_2} g(u,v)$, indicando explícitamente $g(u,v)$. Suponer que las regiones D_1 y D_2 son tales que ambas integrales están bien definidas.
3. Encuentra el valor de $\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy$, donde D es el sector del disco de radio 1 centrado en $(0,0)$ mostrado en la figura.



4. Sea D la región en el plano xy encerrada por un triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. Muestra que en coordenadas polares D se puede escribir como

$$D = \left\{ (r,\theta) \,|\, 0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta) + \cos(\theta)} \right\}.$$

5. Sea C_a un cuadrado en el plano xy de lado $a > 0$, centrado en (x_0, y_0) y con lados paralelos al los ejes coordenados. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua. Usa el teorema del valor medio para mostrar que $\lim\limits_{a \to 0} \dfrac{\iint_{C_a} f(x,y)dxdy}{Area(C_a)} = f(x_0, y_0)$.

6. Sea T_a la región en el plano xy encerrada por un triángulo con vértices $(0,0)$, $(a,0)$ y $(0,a)$ con $a > 0$. Sea $D_a = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$. Encuentra $\lim\limits_{a \to 0} \dfrac{\iint_{T_a} (x+1)^3(2y+3)^2 dxdy}{\iint_{D_a} e^{x^2-y+1} dxdy}$.

7. Demuestra que $\dfrac{1}{2}(1 - \cos(1)) \leq \displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1 + (xy)^4} dxdy \leq 1$