CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 8
Otoño 2020
Integración por partes

1. Encuentra las siguientes integrales:
   (a) $\int_0^a te^{-t/a}\, dt, \;\; a > 0.$
   (b) $\int \dfrac{\ln(x)}{x^2} dx.$
   (c) $\int \cos\left(\sqrt{5x+3}\right)\; dx.$
   (d) $\int \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}} dx.$
   (e) $\int \operatorname{sen}^{-1}(3x)\, dx.$
   (f) $\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx.$
   (g) $\int_0^1 \dfrac{x^3}{(1+x^2)^3}\, dx.$

2. Utilizando una integración por partes demuestra las siguientes fórmulas de reducción de grado:
   (a)
   $$\int x^n e^{ax}\, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax}\, dx, \text{ con } a \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
   (b)
   $$\int \operatorname{sen}^n(x)\, dx = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x) + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\, dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$
   (c)
   $$\int_0^1 (\ln x)^n\, dx = (-1)^n n!$$

3. Demuestra que
$$\int_a^b \int_x^b f(t) dt dx = \int_a^b (x-a)\, f(x) dx.$$

4. (a) Demuestra que
   $$\int f^{-1}(x)\, dx = x f^{-1}(x) - \int f(y) dy, \quad \text{con } y = f^{-1}(x)\, .$$
   (b) Utilizando el inciso anterior, determina $\int \cos^{-\mathbf{1}}(x) dx$.

5. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable, tal que

$$f''(x) = -\frac{3}{x^4}\cosh\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^5}\operatorname{senh}\left(\frac{1}{x}\right)$$

para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(1) = \cosh(1)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. Demuestra que

$$f(x) = -\frac{1}{x}\operatorname{senh}\left(\frac{1}{x}\right) + \cosh\left(\frac{1}{x}\right).$$