CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 7
Otoño 2020
Formas indeterminadas

1. Sin utilizar la regla de L'Hopital prueba que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1}(x)}{x} = 1 \quad \text{(cambia variable).}$$

2. Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha_1 \mathrm{senh}\left(\dfrac{x}{1-x}\right), & \text{si } x < 0 \\ \alpha_2 + \tan^{-1}(x), & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

en donde α_1 y α_2 son constantes reales. Determina α_1 y α_2 de modo que la función f sea continua y diferenciable en $\mathbb{R}$.

3. Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ y

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Demuestra que F es continua en el punto $x = 0$.

(b) ¿En qué condiciones se puede garantizar que F es diferenciable en el punto $x = 0$?

4. Calcula, si existen, los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{\mathrm{sen}(\pi x)}$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x + x^2/2}{x^3}$.

(c) $\displaystyle\lim_{a\to 1} \frac{x^{1-a}-1}{1-a}, \quad x > 0.$

(d) $\displaystyle\lim_{\theta\to \pi/2} \frac{\sec(\theta)}{\tan(\theta)}$.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{(-1/x^2)}}{x}$.

(f) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{2^x + 4^x}{5^x - 2^x}$.

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right)$.

(h) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left[\ln(1+6x) - \ln(4+3x)\right]$.

(i) $\lim_{x\to\infty} \left(2\sqrt{x}\left[\pi - 2\tan^{-1}(\sqrt{x})\right]\right)$.

(j) $\lim_{x\to\infty} \left(x - \ln\left(3e^x + 1\right)\right)$.

(k) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{a^{1/x} + b^{1/x}}{2}\right)^x, \quad a > 0, b > 0.$

(l) $\lim_{x\to 0^+} \left(\operatorname{sen}(x)\right)^{\cot(x)}$.

5. Sea f una función continua en $\mathbb{R}$. Demuestra que

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \int_0^{1/x} f(t)dt\right)^x = e^{f(0)}.$$