CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 6
Otoño 2020
Funciones trigonométricas inversas

1. Prueba que

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right), \quad \text{si } 0 < |x| \leq 1.$$

Sugerencia: Dibuja un triángulo o deriva ambos lados de la igualdad.

2. Considera la función definida por $f(x) = -\pi + \cos^{-1}(1 - \ln x)$.

   (a) Determina: (i) el dominio de f, (ii) la imagen de f, (iii) los ceros de f, (iv) las soluciones de la ecuación $f(x) = -\pi$.

   (b) Demuestra que f es inyectiva.

   (c) Caracteriza la función inversa de f (dominio, imagen y regla de correspondencia).

   (d) Esboza la gráfica de f.

3. (a) Prueba que

$$\int \operatorname{sech}(x)\, dx = \tan^{-1}(\operatorname{senh}(x)) + C.$$

   Sugerencia: $\int \operatorname{sech}(x)\, dx = \int \frac{1}{\cosh(x)}\, dx = \int \frac{\cosh(x)}{\cosh^2(x)}\, dx.$

   (b) Prueba también que

$$\int \operatorname{sech}(x)\, dx = \operatorname{sen}^{-1}(\tanh(x)) + C. \quad \text{(Derivar.)}$$

4. Sea

$$f(x) = \int_0^{1/x} \frac{1}{t^2+1}\, dt + \int_0^{x} \frac{1}{t^2+1}\, dt, \quad \text{con } x > 0.$$

   (a) Sin resolver la integral, demuestra que f es constante.

   (b) Resolviendo la integral, demuestra que la constante es $\pi/2$.
   Sugerencia: $\cot^{-1}(x) = \tan^{-1}(1/x)$.

5. Halla el dominio de cada función y luego encuentra su derivada:

   (a) $f(x) = \sec^{-1}(\ln x)$.

   (b) $f(x) = 3\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{x^2-1})$.

6. Simplifica la expresión $\sec\left(\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{x}\right)$.

7. Determina la primitiva de la función $f(x) = \sec(x)$, efectuando el cambio de variable $t = \operatorname{sen}(x)$. (Sugerencia: Integra usando la sustitución indicada y luego utiliza el ejercicio 7 del laboratorio 5.)

8. Encuentra las siguientes integrales definidas:

   (a) $\int_1^e \dfrac{dx}{x\left(1 + \ln^2 x\right)}$.

   (b) $\int_{-2}^{2\sqrt{3}-2} \dfrac{dx}{x^2 + 4x + 8}$.

   (c) $\int_{-b}^{-b/2} \dfrac{dx}{\sqrt{-2bx - x^2}}$, $b > 0$.