Taller 6. Cálculo Diferencial e Integral III. Otoño 2020

Derivadas Parciales de Orden Superior y Regla de la Cadena (Parte II)

Nota: En algunos ejercicios se usa la notación f_x o bien $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ para denotar la derivada parcial de f respecto a la variable x. Similarmente se usa f_{xy} o bien $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ para denotar la segunda derivada parcial de f primero respecto a x y luego respecto a y.

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f = f(x, y, z)$, de clase C^3. Usa el hecho de que para funciones de clase C^2 las derivadas cruzadas de segundo orden coinciden, para mostrar que $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x}$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2. Sea $w = f(x, y)$ y sean $x = u + v$, $y = u - v$. Muestra que $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 y sea $\mathbf{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de clase C^2. Escribe una fórmula para $\dfrac{d^2}{dt^2}(f \circ \mathbf{c})(t)$ usando la regla de la cadena.

4. Sea $u : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 en un abierto U, $u = u(x, y)$. Se dice que u es armónica si u satisface la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ en } U.$$

   ¿Cuáles de las siguientes funciones son armónicas?
   a) $u(x, y) = x^2 - y^2$, b) $u(x, y) = e^x \operatorname{sen}(y)$, c) $u(x, y) = y^3 + 3x^2 y$,
   d) $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.

5. Sea $z = f(x, y)$, $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$, donde f, g y h son funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ de clase C^2. Muestra que $z_{uu} = f_x g_{uu} + f_y h_{uu} + 2 g_u h_u f_{xy} + (g_u)^2 f_{xx} + (h_u)^2 f_{yy}$.

6. Sea $u : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 en un abierto U, $u = u(x, y)$. El *laplaciano* de u se define como $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Si $x = r\cos(\theta)$, $y = r\operatorname{sen}(\theta)$, muestra que en coordenadas polares, el laplaciano de u se escribe como $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$.