

## Taller 5. Cálculo Diferencial e Integral III. Otoño 2020

### Gradientes y Derivadas Direccionales

1. Encuentra la ecuación del plano tangente a la superficie en  $\mathbb{R}^3$  dada por la ecuación  $x^2 + y^2 = z^2 - z + 6xy - 6$  en el punto  $(1, 1, 2)$ .
2. Encuentra un vector no nulo en  $\mathbb{R}^3$  que sea normal a la superficie descrita por  $e^{x+2z} + z^2 = xyz + 4$  en el punto  $(2, 1, -1)$ .
3. (Tomado del examen de muestra GRE de Matemáticas) Sea  $g$  la función definida por  $g(x, y, z) = 3x^2y + z$  para cualesquiera  $x, y, z$  reales. ¿Cuál de los siguientes números es el más cercano al valor exacto de la derivada direccional de  $g$  en el punto  $(0, 0, \pi)$  en la dirección del vector  $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ? (Nota:  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  son los vectores de la base canónica en  $\mathbb{R}^3$   $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  y  $(0, 0, 1)$  respectivamente.)  
A) 0.2    B) 0.8    C) 1.4    D) 2.0    E) 2.6
4. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = x^3 - 3xy + 2xy^2$ . Sea  $\gamma$  la curva de nivel de  $f$  que pasa por el punto  $(2, -2)$ . Encuentra un vector no nulo en  $\mathbb{R}^2$  que sea perpendicular a dicha curva en el punto  $(2, -2)$ . Encuentra la ecuación de la recta tangente a  $\gamma$  en el punto  $(2, -2)$  en la forma  $y = mx + b$ .
5. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable. Suponer que una curva de nivel de  $f$  puede ser parametrizada por una trayectoria de clase  $C^1$ ,  $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$  con  $t \in \mathbb{R}$ . Suponiendo que en  $t_0$  se cumple que  $\mathbf{c}'(t_0) \neq (0, 0)$  y que  $\mathbf{c}(t_0) = (x_0, y_0)$ . ¿Cuánto vale la derivada direccional de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  en la dirección del vector  $\mathbf{c}'(t_0)$ ?
6. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable. Sean  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  dos vectores en  $\mathbb{R}^2$  linealmente independientes. Supongamos que en un punto  $(x_0, y_0)$  se conocen los valores de las derivadas direccionales de  $f$  en las direcciones de  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$ . Describe cómo encontrar la dirección de máximo crecimiento de  $f$  en el punto  $(x_0, y_0)$  usando los vectores  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  y las derivadas direccionales respectivas de  $f$  en  $(x_0, y_0)$ .
7. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x, y, z) = x^2 - 3xyz + z^3y - 1$ . Encuentra la dirección en la que  $f$  crece más a partir del punto  $(2, 1, -1)$ . ¿Cuál es el valor de la máxima razón de crecimiento en dicho punto?
8. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = x^2 - \frac{y^2}{4}$ . Muestra que no existe un vector  $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$  tal que la derivada direccional de  $f$  en el punto  $(1/2, 2)$  en la dirección de  $\vec{v}$  sea 4.