CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 2
Otoño 2020
Teorema Fundamental del Cálculo. Integral por sustitución.

1. Halla la derivada de la función en cada inciso (sin integrar):

   (a) $G(x) = \int_{x}^{1} \sqrt{1+t^4}\, dt.$

   (b) $G(x) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+t^4}\, dt.$

   (c) $G(t) = \displaystyle\int_{0}^{t^3} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

   (d) $G(x) = \int_{0}^{1} x^2 \left(\dfrac{1}{1+s^3}\right) ds.$

   (e) $G(x) = \int_{0}^{x} x^2 \left(\dfrac{1}{1+s^3}\right) ds.$

2. Sea $F(x) = \displaystyle\int_{0}^{x} \frac{t-3}{t^2+7}\, dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento de F.

   (b) Encuentra el punto x en donde F alcanza su valor mínimo.

   (c) Encuentra los intervalos en donde F es convexa (cóncava hacia arriba) y cóncava (cóncava hacia abajo).

3. Para $\theta \in (\pi/2, \pi/2)$ define

$$S(\theta) = \int_{0}^{\operatorname{sen}\theta} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

   Usa la regla de Leibniz para probar que $S'(\theta) = 1$ para todo $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Concluye que $S(\theta) = \theta$ para todo $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$g(x) = (x+1) \int_{-1}^{x} f(t)\ dt.$$

   (a) Demuestra que $g(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Justifica que g es diferenciable en $\mathbb{R}$ y entonces calcula $g'(x)$.

5. Sea f función continua en $[a,b]$. Demuestra que existe un número $x \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^x f(t)\ dt = \int_x^b f(t)\ dt.$$

Sugerencia: Considera la función $g(x) = \int_a^x f(t)\ dt - \int_x^b f(t)\ dt$.

6. Calcula el siguiente límite (sin usar la regla de L'Hopital):

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1} \int_1^x \frac{t^2}{t^4+1}\, dt.$$

Sugerencia: Usa $F'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{F(x)-F(1)}{x-1}$ y aplica el TFC.

7. Determina las siguientes integrales indefinidas:

   (a) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}$.

   (b) $\int \sqrt{\dfrac{x-1}{x^5}}dx$. Sugerencia: $\sqrt{\dfrac{x-1}{x^5}} = \dfrac{1}{x^2}\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$

8. Calcula las siguientes integrales, usando el teorema del cambio de variable para integrales definidas (haz una sustitución y cambia los límites de integración):

   (a) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen}|\pi - 2x|\ dx$.

   (b) $\int\limits_{\pi/8}^{\pi/4} \dfrac{\cos(2\theta)}{\operatorname{sen}^3(2\theta)}\, d\theta$.

   (c) $\int\limits_{1}^{x} \dfrac{t^2}{\sqrt{t^3+3}}\, dt$, con $x \geq 1$.

   (d) $\int\limits_{0}^{3} \dfrac{t}{\sqrt{1+t}}\, dt$.

9. Sea f continua en el intervalo $[a,b]$ y sea $\lambda \neq 0$ una constante. Usa el teorema del cambio de variable para integrales definidas para demostrar:

   (a) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+\lambda}^{b+\lambda} f(x-\lambda)dx$.

   (b) $\int_a^b f(x)\,dx = \dfrac{1}{\lambda} \int_{\lambda a}^{\lambda b} f\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)\, dx$.