Taller 2. Cálculo Diferencial e Integral III. Otoño 2020

Abiertos, cerrados, frontera, límites, continuidad

1. Justificar por qué el conjunto $\{2/n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ no es cerrado en $\mathbb{R}$, pero $\{n/2 \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$. ¿Qué número real se le debe añadir al primer conjunto para que sea cerrado?

2. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1\}$. Demuestra que A es abierto en $\mathbb{R}^2$ demostrando que si $\vec{X}_0 = (x_0, y_0)$ está en A, entonces la bola abierta $B_r(\vec{X}_0)$ está contenida en A, donde $r = \min\{x_0, y_0, 1 - x_0, 1 - y_0\}$.

3. Si U es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$, justifica por qué la frontera de U está en el complemento de U.

4. Muestra que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ no existe.

5. Usa el hecho de que $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} = 1$ para mostrar (con una argumento $\epsilon - \delta$) que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{xy} = 1$.

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \dfrac{xy}{|x| + |y|}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$. Muestra que f es continua en $(0, 0)$.

7. Muestra que para todo entero positivo n, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{|x|+|y|}}}{|x|^n + |y|^n} = 0$. (Puedes hacer cambio de variables a coordenadas polares, la regla de L'Hôpital, etc.)