

## Taller 1. Cálculo Diferencial e Integral III. Otoño 2020

### Curvas y conjuntos de nivel

1. Sean  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $f(x, y) = x^2 - 3xy - 3$ ,  $g(x, y) = 3y + x - 1$ . Encuentra los puntos en  $\mathbb{R}^2$  que están tanto en la curva de nivel de  $f$  como en la de  $g$  correspondientes al valor  $c = 1$ .
2. Sean  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $f(x, y) = x^2 - ay^2 + 5$ ,  $g(x, y) = ax^2 + 2y$ , donde  $a$  es una constante que se determina con la siguiente condición: El punto  $(-2, -1)$  pertenece tanto a una curva de nivel de  $f$  como a una curva de nivel de  $g$  correspondientes a un mismo valor. Encuentra el valor de  $a$  y encuentra el valor correspondiente de las dos curvas de nivel.
3. Sea  $S$  la superficie en  $\mathbb{R}^3$  definida por la ecuación  $3x^2y - ze^{x^2-y^2} = 1 + x + z$ .
  - (a) Encuentra una función  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f = f(x, y, z)$ , tal que  $S$  sea el conjunto de nivel de  $f$  correspondiente al valor  $c = -4$ .
  - (b) Encuentra una función  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g = g(x, y)$ , tal que  $S$  sea la gráfica de  $g$ .
4. Dibuja en el plano  $xy$  los conjuntos de nivel correspondientes al valor 0 de las siguientes funciones:
  - (a)  $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(x^2 - y^2)$
  - (b)  $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2 + (x^2 - y^2)^2$
5. Repaso de coordenadas polares:
  - (a) Usar la función  $\tan^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$  (también llamada "arcotangente" y denotada por  $\arctan$ ), para deducir una fórmula que calcule las coordenadas polares  $(r, \theta)$ ,  $r > 0, \theta \in [0, 2\pi)$  de un punto  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$  dado en coordenadas cartesianas (rectangulares).
  - (b) Sean  $x, y$  números reales tales que  $xy \neq 0$ . Si  $r$  y  $\theta$  son tales que

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta),$$

muestra que

$$\frac{x^2 + y^2}{xy(1 + x^2 + y^2)} = \frac{2}{(1 + r^2)\sin(2\theta)} \quad \text{y que} \quad \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \cos(2\theta).$$

6. Dibuja el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación  $x^2 + 4y^2 = 4$  en los siguientes casos:
  - (a) Como una ecuación en  $\mathbb{R}^2$  (plano  $xy$ ).
  - (b) Como una ecuación en  $\mathbb{R}^3$  (espacio  $xyz$ ).

7. Dibujar gráficas de funciones con MATLAB: En el taller se les mostrará un código en MATLAB para hacer gráficas de funciones  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $D$  es un rectángulo o un círculo. Esta herramienta es muy útil, pero no se evaluará en los exámenes del curso.