



INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO

Departamento de Matemáticas
Cálculo Diferencial e Integral I
(MAT14100)

Lista de Ejercicios

Variables y Funciones

Repaso de Introducción a las Matemáticas Superiores

Funciones

Antes de hacer los ejercicios, despeja un poco tu mente leyendo sobre el concepto de función en <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Functions.html>.

1. Determina el dominio, contradominio y rango de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x - 1$

b) $f(x) = 2x^2$

c) $f(x) = \sqrt{9 - x}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

e) $f(x) = |3x + 2|$

f) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

g) $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 3}{x + 3}$

h) $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$

i) $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$

2. Determina el dominio, contradominio y rango de las siguientes funciones definidas por partes:

a) $g(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \leq 3 \\ 2 & \text{si } 3 < x \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x \neq 1 \\ 8 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

c) $g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \neq 3 \\ -2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

d) $g(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x < 0 \\ 3x + 1 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$

e) $g(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < -5 \\ \sqrt{25 - x^2} & \text{si } -5 \leq x < 5 \\ 3 - x & \text{si } 5 < x \end{cases}$

3. Determina el dominio de las siguientes funciones:

a) $h(x) = \sqrt[3]{9 - x^2}$

b) $h(x) = \sqrt[4]{1 - \sqrt{1 - x^2}}$

c) $h(x) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt[4]{x^2 - 1}$

d) $h(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 3x}{2 - \sqrt{2 - x}}}$

e) $h(x) = \sqrt{4 - x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$

f) $h(x) = \sqrt{\frac{5 + x}{-x^2 - 3x + 10}} + \frac{1}{x^2 - 4x}$

g) $h(x) = \sqrt{\left|\frac{x - 2}{2}\right| - \left|\frac{x - 1}{3}\right|}$

h) $h(x) = \sqrt{\cos 2x}$

4. Define las siguientes funciones y determina el dominio de la función resultante: (i) $f + g$; (ii) $f - g$; (iii) $f \circ g$; (iv) f/g ; (v) g/f .

a) $f(x) = x - 5$; $g(x) = x^2 - 1$

b) $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 + 1$

c) $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$; $g(x) = \frac{1}{x}$

d) $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 4 - x^2$

e) $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 - 1$

f) $f(x) = |x|$; $g(x) = |x - 3|$

g) $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = 3x - 2$

h) $f(x) = \sqrt{x-4}$; $g(x) = x^2 - 4$

i) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; $g(x) = \sqrt{x-1}$

i) $f(x) = \frac{1}{x+1}$; $g(x) = \frac{x}{x-2}$

j) $f(x) = x^2$; $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

5. Traza la gráfica de $y = f(x)$ donde

$$f(x) = \begin{cases} |x-2| & \text{si } |x| < 1, \\ -x^2 & \text{si } 1 < |x| \leq 2 \\ -4 & \text{si } |x| > 2. \end{cases}$$

6. Para los siguientes ejercicios haz lo que se indica: (i) grafica la función; (ii) redefine la función dada como una función por partes sin emplear las barras de valor absoluto; (iii) grafica la función definida en el inciso anterior y compara con la gráfica que obtuviste en (i); (iv) comprueba tu respuesta apoyándote en alguna herramienta tecnológica.

a) $|x^2 - 1|$

b) $|4 - x^2|$

c) $|x| \cdot |5 - x|$

d) $|x| \cdot |x - 3|$

7. Define las siguientes funciones y encuentra el dominio de: (i) $f \circ g$; (ii) $g \circ f$; (iii) $f \circ f$; (iv) $g \circ g$.

a) $f(x) = x - 2$; $g(x) = x + 7$

b) $f(x) = 3 - 2x$; $g(x) = 6 - 3x$

c) $f(x) = x - 5$; $g(x) = x^2 - 1$

d) $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 + 1$

e) $f(x) = \sqrt{x-2}$; $g(x) = \frac{1}{x}$

f) $f(x) = \frac{1}{x}$; $g(x) = \sqrt{x}$

g) $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = -\frac{1}{x}$

h) $f(x) = |x|$; $g(x) = |x + 2|$

8. Completa la siguiente tabla

f	g	$g \circ f$
$3x + 7$		$2x - 1$
	$\frac{1}{x}$	x
x^2		$ x $
$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	
	$1 + \frac{1}{x}$	x
	$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^3-5}$

9. Supón que $f(x) = 2x - 3$. Obtén $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(g(x)) = x + 7$ y $h(f(x)) = x + 7$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

10. Evalúa cada expresión usando los valores dados en la tabla.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1	0	-2	1	2
$g(x)$	2	1	0	-1	0

a) $f(g(-1))$

b) $g(f(0))$

c) $f(f(-1))$

d) $g(g(2))$

e) $g(f(-2))$

f) $f(g(1))$

11. Encuentra fórmulas para $f \circ g$ y $g \circ f$ si

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x. \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{2}x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x. \end{cases}$$

Dibuja las gráficas de $f, g, f \circ g$ y $g \circ f$.

12. Obtén $f \circ g$ si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } |x| \leq 0, \\ -x^2 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x < 0, \\ -\sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

13. Sean $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 3x + 2$. Encuentra los valores de x para los cuales

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$$

14. Sean $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = 2x + 1$ Halla g y h tales que

$$(f \circ g)(x) = 2x + 5 \quad \text{y} \quad (h \circ f)(x) = 4x - 1$$

15. Clasifica cada una de las siguientes funciones como para, impar o ninguna:

- $f(x) = x^2 \sin x$,
- $f(x) = \sin^2 x$,
- $f(x) = x + x^2$,
- $f(x) = \sin x \tan x$.

16. Demuestra que si una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es ambas par e impar, entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. *Sugerencia.* $f(-x) = f(x) = -f(x)$.

17. Demuestra que si f y g son funciones impares, entonces $f + g$ y $f - g$ también son funciones impares, mientras que $f \cdot g$ y f/g son funciones pares.

18. Determina si la función $f \circ g$ es par o impar en los siguientes casos:

- f y g son impares,
- f es par y g es impar,
- g es par.

19. Demuestra que si f y g son dos funciones lineales, entonces $f \circ g$ es una función lineal.

20. Prueba que las siguientes funciones $y = f(x)$ son biyectivas y obtén la inversa de cada una.

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) = mx + b$ si $m \neq 0, b \in \mathbb{R}$.

b) $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, con

$$f(x) = \frac{x}{1-|x|}$$

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) = (x - 3)^3 - 1$

21. Demuestra que f y g son inversas la una de la otra.

a) $f(x) = 2x - 3$; $g(x) = \frac{x + 3}{2}$

b) $f(x) = \frac{1}{x + 1}$; $g(x) = \frac{1 - x}{x}$

c) $f(x) = x^2, x \geq 0$; $g(x) = \sqrt{x}$

d) $f(x) = x^2, x \leq 0$; $g(x) = -\sqrt{x}$

e) $f(x) = (x - 1)^3$; $g(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$

22. Prueba que las siguientes funciones son biyectivas y obtén su inversa.

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = mx + b, m \neq 0$

b) $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = (x - 3)^3 - 1$

23. Sean

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0, \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x < 0, \\ -\sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Determina $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g, 1/g$ y fg así como sus dominios. Traza la gráfica de cada una.

Puedes encontrar más información en <http://matematicas.itam.mx/intromate/index.html>.

También puedes encontrar más ejercicios de repaso en <http://matematicas.itam.mx/calculo1/guias.htm>.