CALCULO I
Repaso de I.M.S.

1. Simplifica las siguientes expresiones:

   (a) $\left(\dfrac{8x^3y^{1/3}}{y^{2/3}}\right)^{-3}\left(\dfrac{y^{-1/3}}{2x^2}\right)^{-6}$

   (b) $\dfrac{(9st)^{3/2}}{(27s^3t^{-4})^{2/3}}$

   (c) $\dfrac{3+\dfrac{6}{x-2}}{x-3-\dfrac{6}{x-2}}$

   (d) $\dfrac{1-\dfrac{1}{x-a}}{x-1-\dfrac{a}{x-a}}$

   (e) $\dfrac{8+\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{7}{x+3}}{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{7}{x+3}}$

2. Factoriza completamente las siguientes expresiones:

   (a) $a\,(x-y)+(a-1)\,(y-x)$

   (b) $(x-1)^{7/2}-(x-1)^{3/2}$

   (c) $\left(a^2+2a\right)^2-2\left(a^2+2a\right)-3$

   (d) $y^3-3y^2-4\,(y-3)$

3. Encuentra todas las soluciones de:

   (a) $x+3=\sqrt{4x+17}$

   (b) $\dfrac{12}{x-2}=\dfrac{3}{x-1}-2$

   (c) $\left|\dfrac{x-3}{x+2}\right|=1$

   (d) $2\,|x-1|=2+|2x-4|$

4. Resuelve las siguientes desigualdades y expresa la solución en términos de intervalos:

   (a) $3x+28<4\,(x+2)^2$

   (b) $\dfrac{2}{x^2-16}\leq\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{2}{x-4}$

   (c) $|x-3|<(x-5)^2$

   (d) $3x-1\leq|1-2x|$

   (e) $\dfrac{-2}{3x-4}\geq 3$

   (f) $\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{1}{x-3}>0$

   (g) $-2<x\,(1-6x)$

   (h) $\left|\dfrac{x+2}{4-x}\right|<2$

   (i) $|2-3x|<x$

   (j) $4x+2\leq|2-|-2x+4||$

5. Encuentra una ecuación para la recta determinada por las siguientes condiciones. Ilustra con una gráfica.

   (a) Paralela a la recta $2x-3y=6$ y corta al eje X en $x=-4$

   (b) Perpendicular a la recta $x=2y-4$ y contiene al punto $(3,-2)$

   (c) Pasa por el orígen $(0,0)$ y contiene al punto medio del segmento determinado por $(3,-1)$ y $(1,3)$

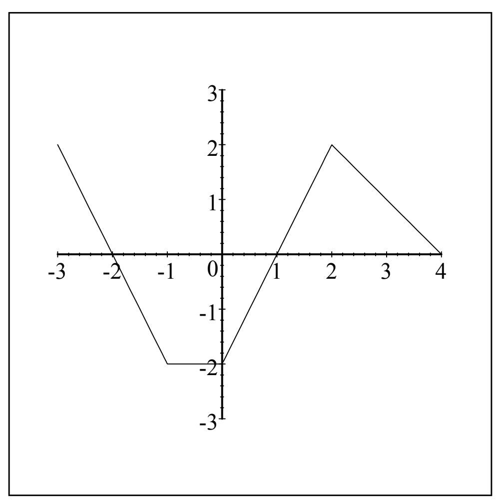
6. Dada la función $f\,(x)=\dfrac{x+2}{x-6}$ resuelve las siguientes preguntas:

   (a) ¿Alguno de los puntos $(4,-3)\,,(-2,1)\,,(6,0)$ se encuentran sobre su gráfica?

   (b) ¿Para qué valor de x se tiene que $f\,(x)=\dfrac{2}{3}$?

   (c) ¿En qué intervalos de valores de x es cierto que $f\,(x)\geq x-3$?

7. Si la siguiente es la gráfica de la función $g\,(x)$ con $x\in[-3,4]$



(a) Determina el rango de $g(x)$

(b) Dibuja la gráfica de $g(x-2)$

(c) Dibuja la gráfica de $g(x)+2$

(d) Dibuja la gráfica de $g(x-1)+1$

(e) Dibuja la gráfica de $|g(x)|$

(f) Dibuja la gráfica de $1-|g(x)|$

8. Determina el dominio de las siguientes funciones:

   (a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}$

   (b) $g(x)=\dfrac{x-2}{6-x-x^2}$

   (c) $h(x)=\dfrac{x}{1-\dfrac{x}{1-\dfrac{x}{1-x}}}$

   (d) $f(x)=\dfrac{x^{-1}}{x^2-2}$

   (e) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5x+6}$

9. Dadas: $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $g(x)=\sqrt{x+2}$, $h(x)=2-3x$

   (a) Calcula los dominios y rangos de $f(x)$, $g(x)$, y $h(x)$

   (b) Obtén expresiones simplificadas para las siguientes composiciones y calcula los dominios:

   (a) $[g\circ f](x)$
   (b) $[f\circ h](x)$
   (c) $[f\circ f](x)$
   (d) $[f\circ g](x)$
   (e) $[g\circ f\circ h](x)$

   (c) Obtén expresiones simplificadas para las siguientes operaciones y calcula los dominios:

   (a) $f(x)+\dfrac{1}{g(x)^2}$
   (b) $\dfrac{f(x)}{h(x)}$
   (c) $g(x)\left(\dfrac{1}{f(x)}-h(x)\right)$

10. Dadas las funciones: $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{x}}$ y $h(x)=|x|$

    (a) Calcula el dominio de $f(x)$ y el de $[f\circ h](x)=f(h(x))$

    (b) Encuentra una expresión simplificada para $f(x-4)$

11. Las funciones siguientes se obtienen de funciones conocidas, cuyas gráficas deben ser familiares, usando transformaciones de tipo traslación o escalamiento. Ilustra en una misma gráfica a la función conocida y a la función transformada.

    (a) $f(x)=|x+3|-2$

    (b) $g(x)=\dfrac{1}{2}\left((x+1)^2-4\right)$

    (c) $h(x)=\dfrac{1}{x+2}-1$

    (d) $p(x)=2\left(\sqrt{x+2}+1\right)$

12. Usa la técnica de completar el cuadrado para trazar las gráficas de las siguientes funciones cuadráticas. Exhibe los cortes con los ejes y los máximos o mínimos:

    (a) $f(x)=3x^2+12x-36$

    (b) $f(x)=-4x^2+24x-27$

    (c) $f(x)=2x^2+4x+10$

13. Las siguientes funciones polinomiales tienen un cero en $x=c$, es decir $q(c)=0$. Usa el proceso de división para encontrar las otras raíces y factorizar completamente el polinomio.

    (a) $q(x)=x^3+3x^2-10x-24$, $c=-2$

    (b) $q(x)=x^5-8x^3+16x-3x^4+24x^2-48$, $c=3$

    (c) $q(x)=x^3-3x^2+x+5$, $c=-1$

14. Las gráficas de las siguientes funciones racionales se obtienen por transformaciones simples de las de $f(x)=\pm\dfrac{1}{x}$ ó $f(x)=\pm\dfrac{1}{x^2}$. Haz las manipulaciones necesarias y esboza la gráfica.

(a) $r(x) = \dfrac{2x+7}{x+3}$

(b) $r(x) = \dfrac{x-3}{x-2}$

(c) $r(x) = \dfrac{2x^2+4x+3}{(x+1)^2}$

(d) $r(x) = \dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+4x+3}$

15. Las siguientes funciones $f(x)$ son todas uno a uno. Encuentra la expresión para la inversa $f^{-1}(x)$ y verifica que $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ y que $f^{-1}(f(x)) = x$.

(a) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$

(b) $f(x) = 4 - \dfrac{2}{x}$

16. Dada la información siguiente, encuentra los valores de todas las restantes funciones trigonométricas de θ:

(a) $sen\theta = -\frac{4}{5}$, $\cos\theta > 0$

(b) $\csc\theta = -\frac{5}{3}$, $\cot\theta < 0$

(c) $\tan\theta = \frac{1}{3}$, $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

(d) $\cos\theta = \frac{12}{13}$, $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

17. Dibuja la gráfica de las siguientes ecuaciones en el intervalo de x dado:

(a) $y = sen(x) - 1$, $x \in [0, 2\pi]$

(b) $y = -2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $x \in [-\pi, \pi]$

(c) $y = sen(2x)$, $x \in [0, 2\pi]$

(d) $y = \cos(2x - \pi)$, $x \in [-\pi, \pi]$

(e) $y = \tan(x - \pi)$, $x \in [-\pi, \pi]$

(f) $y = \sec\left(\frac{x}{2}\right)$, $x \in [-\pi, \pi]$

18. Establece las siguientes identidades. Trabaja con uno solo de los lados y usa tus definiciones e identidades conocidas hasta que llegues a obtener el otro lado.

(a) $\dfrac{\cos(a-b)}{sen(a)\cos(b)} = \cot(a) + \tan(b)$

(b) $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$

(c) $\dfrac{\cos(2a)}{1 + sen(2a)} = \dfrac{\cot(a) - 1}{\cot(a) + 1}$

(d) $\tan\left(\frac{a}{2}\right) = \csc(a) - \cot(a)$

(e) $\cot\left(\frac{a}{2}\right) = \dfrac{1 + \cos(a)}{sen(a)}$

(f) $\csc(2a) = \frac{1}{2}\sec(a)\csc(a)$

(g) $\sec^2\left(\frac{a}{2}\right) = \dfrac{2}{1 + \cos(a)}$

19. Sin usar calculadora, encuentra el valor de las siguientes expresiones. Hint: los ángulos se pueden expresar en términos de sumas, diferencias o múltiplos de ángulos conocidos, es decir $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{6}$.

(a) $sen\left(\frac{5\pi}{8}\right)$

(b) $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

(c) $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

(d) $\sec\left(\frac{7\pi}{12}\right)$