Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas
Cálculo Diferencial e Integral I
(MAT14100)

Lista de Ejercicios

Los números reales

Igualdades y desigualdades

Antes de hacer los ejercicios, despeja un poco tu mente leyendo sobre la historia de los números reales en `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Real_numbers_1.html`.

1. Determina todos los valores reales que satisfacen
$$\sqrt{(x^2-5x+6)^2} = x^2-5x+6.$$

2. Obtén el conjunto solución de las siguientes desigualdades:
   a) $|2x^2+x-1| \geq x^2+1$,
   b) $|x|+|x+1| < 2$,
   c) $4 < |x+2|+|x-1| < 5$,
   d) $\left|\dfrac{1-x}{x-4}\right| > 0$,
   e) $|2x-|x-3|| < 5$,
   f) $\dfrac{x+1}{2-x} > \dfrac{x}{3+x}$.

3. Obtén el conjunto de números cuya distancia a 3 es mayor a 5.

4. Obtén el conjunto de números cuya distancia a -2 más su distancia a 1 es mayor a 1.

5. Escribe los siguientes decimales periódicos como cociente de dos números enteros:
   a) $4.0\overline{17}$,
   b) $-15.7\overline{915}$,
   c) $0.0\overline{12345}$.

6. Encuentra un número racional y un número irracional entre
   a) 0.1723 y 0.1815
   b) 0.98 y 0.99
   c) $0.0\overline{12345}$ y $0.0\overline{23456}$
   d) Encuentra una infinidad de números irracionales entre los números de los incisos anteriores.

7. Escribe los siguientes intervalos como el conjunto solución de una desigualdad de la forma $|x-x_0| < \delta$ para algunas $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$.
   a) $\mathcal{I} = (0,3)$,
   b) $\mathcal{I} = (-3,2)$,
   c) $\mathcal{I} = (3,3+a)$.

8. Encuentra $\delta > 0$ tal que cumpla
   a) si $0 < |x-3| < \delta$ entonces $|x^2-9| < 0.5$,
   b) si $0 < |x-0.5| < \delta$ entonces $|x^2-0.25| < 0.1$,
   c) si $0 < |x+1| < \delta$ entonces $|x^2-1| < 0.2$,
   d) si $0 < |x-1| < \delta$ entonces $|(x^2-5)+4| < 0.15$,
   e) si $0 < |x-2| < \delta$ entonces $|(x^2-2x+1)-1| < 0.4$,
   f) si $0 < |x+1| < \delta$ entonces $|(x^2+4x+4)-1| < 0.08$,
   g) si $0 < |x+3| < \delta$ entonces $|(2x^2+5x+3)-6| < 0.6$,
   h) si $0 < |x-1| < \delta$ entonces $|(3x^2-7x+2)+2| < 0.3$,
   i) si $0 < |x+2| < \delta$ entonces $|\frac{x^2-4}{x+2}+4| < 0.01$,
   j) si $0 < |x-\frac{1}{3}| < \delta$ entonces $|\frac{9x^2-1}{3x-1}-2| < 0.01$,
   k) si $0 < |x+\frac{1}{2}| < \delta$ entonces $|\frac{4x^2-4x-3}{2x+1}+4| < 0.03$.

9. Prueba que
$$|a-b| \leq |a+b| \quad \Leftrightarrow \quad ab \geq 0 \quad \forall a,b \in \mathbb{R}.$$
Sugerencia. Eleva al cuadrado la desigualdad.

10. Prueba que
$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}.$$
Sugerencia. $(|x|-|y|)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

11. Prueba que
$$-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Sugerencia. $(|x|-1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

12. Demuestra que $\forall a, b \in \mathbb{R}$ se cumple
$$|a+b| = |a| + |b| \ \Leftrightarrow \ ab \geq 0.$$

13. Demuestra que $\forall a, b \in \mathbb{R}$ se cumple
$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

14. Usa el ejercicio 13 para estimar x por arriba si
    a) $|x-3| \leq 7$,
    b) $|x+6| \leq 12$,
    c) $|3x-15| \leq 4$,
    d) $|4x-5| \leq 3$.

15. Si x e y son números reales cualesquiera, $x < y$, demuestra que existe por lo menos $z \in \mathbb{R}$ tal que $x < z < y$.

16. Demuestra que $\forall a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ se cumple
$$\left| a + \frac{1}{a} \right| \geq 2.$$

17. Demuestra que si $0 \leq a < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $a = 0$.

18. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y supón que $|a-b| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Demuestra que $a = b$.

19. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y supón que $a \leq b + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Demuestra que $a \leq b$.

20. Utiliza la propiedad arquimediana para probar que si $0 < a < b$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que
$$1 < \frac{na}{b}.$$

21. Para cualquier número natural n y cualesquiera números a y b,
$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1} b^k.$$
Usa esta fórmula para probar que para un número natural n y cualesquiera números no negativos a y b,
$$a \leq b \ \Leftrightarrow \ a^n \leq b^n.$$

22. *Desigualdad de Bernoulli.* Muestra que para un número natural n y un número no negativo b,
$$(1+b)^n \geq 1 + nb.$$

23. Para un natural n y un número no negativo b muestra que
$$(1+b)^n \geq 1 + nb + \frac{n(n-1)}{2} b^2.$$

24. *Desigualdad de Cauchy.*
    a) Usa el ejercicio (11) para probar la desigualdad de Cauchy:
    $$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \ \forall a, b \in \mathbb{R}.$$
    b) Usa la desigualdad de Cauchy para probar que si $a \geq 0$ y $b \geq 0$ entonces
    $$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b).$$
    c) Usa la desigualdad de Cauchy para probar que $\forall a, b \in \mathbb{R}$ y para un número natural n,
    $$ab \leq \frac{1}{2}\Big(na^2 + \frac{1}{n} b^2 \Big).$$
    Sugerencia. Reemplaza a por $\sqrt{n}a$ y b por $b/\sqrt{n}$ en la desigualdad de Cauchy.

25. Si $x \neq 0$ es racional e y es irracional, demuestra que $x+y$, $x-y$, xy, x/y, y/x son todos irracionales.

26. Demuestra que no existe ningún número racional cuyo cuadrado es 3; es decir, demuestra que $\sqrt{3}$ no es racional.

27. Un número entero n se llama *par* si $n = 2m$ para un cierto entero m, e *impar* si $n+1$ es par. Demuestra las siguientes afirmaciones:
    a) Un entero no puede ser a la vez par e impar.
    b) Todo entero es par o es impar.

c) La suma o el producto de dos entero pares es par. ¿Qué puedes decir acerca de la suma o del producto de dos enteros impares?

d) Todo número racional puede expresarse en la forma a/b, donde a y b son enteros, uno de los cuales por lo menos es impar.

28. *Fórmula del Chicharronero.*

a) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a \neq 0$ y considera la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Prueba que un número x es solución de esta ecuación si y sólo si

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

b) Supón que $b^2 - 4ac > 0$. Prueba que la ecuación cuadrática tiene exactamente dos soluciones dadas por

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y}$$
$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

c) En la parte 24*e*1 supón ahora que $b^2 - 4ac < 0$. Prueba que no hay un número real que sea solución de la ecuación cuadrática.