Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas
Cálculo Diferencial e Integral I
(MAT14100)

Lista de Ejercicios

Límites

Límites

Antes de hacer los ejercicios, despeja un poco tu mente leyendo la biografía de Augustin Louis Cauchy en `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cauchy.html`.

1. Para los siguientes incisos, determina un valor de $\delta > 0$ que garantice que si

   a) $|x+2| < \delta \Rightarrow |x^2 - 4| < \frac{1}{10}$;

   b) $0 < |x+2| < \delta \Rightarrow |(2x-5) - (-9)| < \frac{1}{10}$;

   c) $0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |x^2 - 9| < \frac{1}{2}$;

   d) $0 < |x - \frac{1}{2}| < \delta \Rightarrow |x^2 - \frac{1}{4}| < \frac{1}{10}$;

   e) $0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |(x^2-5) - (-4)| < \frac{3}{20}$;

   f) $0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |(x^2-2x) - 1| < \frac{2}{5}$;

   g) $0 < |x+1| < \delta \Rightarrow |(x^2+4x) - 1| < \frac{2}{25}$.

2. Sea $\epsilon \in (0,1)$ fija. Determina $\delta = \delta(\epsilon)$ tal que si $0 < |x-1| < \delta$ entonces $|\frac{1}{x} - 1| < \epsilon$.

3. Para los ejercicios $3a$ a $3c$, usa un razonamiento similar al del siguiente ejemplo obtenido de [2].
   Ejemplo El volumen de una gas a presión constante es directamente proporcional a la temperatura absoluta y a la temperatura de 175° C el gas ocupa 100 m^3.

   I Encuentre un modelo matemático que exprese el volumen como una función de la temperatura.

   II ¿Cuál debe ser la temperatura del gas si éste ocupa un volumen entre 79.5 y 80.5 m^3?

   Solución

   I Sea $f(x)$ metros cúbicos el volumen de un gas cuya temperatura es x grados. Entonces, por la definición de variación directamente proporcional,

   $$f(x) = kx, \tag{1}$$

   donde k es una constante. Como el voluman del gas es 100 m^3 a la temperatura de 175° C, se sustituye x por 175 y $f(x)$ por 100 en (1), de donde se obtiene $k = \frac{7}{4}$. Entonces

   $$f(x) = \frac{4}{7}x. \tag{2}$$

   II De (2) tenemos que $f(140) = 80$, el gas ocupa 80 m^3 a una temperatura de 140° C. Se desea determinar qué tan cerca debe estar x de 140 para que $f(x)$ no esté a más de 0.5 de 80; i.e., para $\varepsilon = 0.5$ se desea determinar una $\delta > 0$ tal que si

   $$\begin{aligned} 0 < |x-140| <&\delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 80| < 0.5 \\ 0 < |x-140| <&\delta \quad \Rightarrow \quad |x - 140| < 0.875 \end{aligned}$$

   Sea $\delta = 0.875$, entonces

   $$\begin{aligned} 0 < |x-140| <&0.875 \\ \Rightarrow \quad \frac{4}{7}|x-140| <&\frac{4}{7}(0.875) \\ \Rightarrow \quad |\frac{4}{7}x - 80| <&0.5 \end{aligned}$$

   En consecuencia, si $0 < |x-140| < 0.875$ entonces $|f(x) - 80| < 0.5$. En conclusión, para que el gas ocupe un volumen entre 79.5 y 80.5 m^3 su temperatura debe estar entre 139.125° y 140.875° C.

Ejercicios

a) La cubierta circular de una mesa tiene un área que difiere de 225π cm^2 en menos de 4 cm^2. ¿Cuál es la medida aproximada del radio?

b) A uns persona que gana \$15 por hora se le paga sólo por el tiempo real de trabajo. ¿Qué tan cerca de 8 horas debe trabajar una persona para que su salario difiera de \$120 en no más de 25 centavos?

c) Se construye una cerca alrededor de una jardín de forma cuadrada. ¿Qué tan próximo a 10 m debe estar la longitud de cada lado del jardín para que la longitud total de la cerca esté entre 39.96 y 40.04 m?

4. Calcula los siguientes límites.

   a) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{x^2-49}{x-7}$,

   b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$,

   c) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3x^2-17x+20}{4x^2-25x+36}$,

   d) $\lim\limits_{x\to -3} \sqrt{\dfrac{x^2-9}{2x^+7x+3}}$,

   e) $\lim\limits_{x\to 3/2} \sqrt{\dfrac{8x^3-27}{4x^2-9}}$,

   f) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}$,

   g) $\lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-1}$,

   h) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$, $\quad a>0$,

   i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|2x+1|-|2x-1|}{x}$,

   j) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{t^2+4}-2}{x}$.

5. Demuestra formalmente los límites del ejercicio 4. Si deseas, antes de hacer este ejercicio, puedes practicar con los ejercicios 3-6 y 13,14 de la sección 2.9 de [1], los cuales son guías prácticas de cómo hacer demostraciones sobre límites.

6. Calcula los siguientes límites.

   a) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{(x-1)(x-2)}{x+1}$,

   b) $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{3-x}{x^2-2x-8}$,

   c) $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{|x+1|}{(1+x)^2}$,

   d) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-4x+4}{|2-x|}$,

   e) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{(t-1)^{2/5}}$,

   f) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{2x}(x^2-4)}{|x-2|}$,

   g) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{4-\sqrt{2x}}-\sqrt{4+\sqrt{2x}}}{\sqrt{x}}$,

   h) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3-x}{x^2-4}$,

   i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{-x}}\right)$,

   j) $f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si } x<1, \\ -1 & \text{si } x=1, \\ 3 & \text{si } x>1. \end{cases}$

      1) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$
      2) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$
      3) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

   k) $f(x)=\begin{cases} x+4 & \text{si } x\le -4, \\ 4-x & \text{si } x>-4. \end{cases}$

      1) $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$
      2) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$
      3) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

   l) $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & \text{si } x<1, \\ 4 & \text{si } x=1, \\ x^2+2 & \text{si } x>1. \end{cases}$

      1) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$
      2) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$
      3) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

7. Demuestra formalmente los límites del ejercicio 6.

8. Calcula los siguientes límites.

   a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{5x-2}$,

   b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x+7}{4-5x}$,

   c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{7x^2-2x+1}{3x^2+8x+5}$,

   d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5}{x^3}$,

   e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2}{x^2}-4\right)$,

   f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$,

   g) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x}{x^2+1}-\frac{1-x}{4x}}$,

   h) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$,

   i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-x1\right)$,

   j) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

9. Demuestra formalmente los límites del ejercicio 8.

10. Calcula los siguientes límites.

    a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x}$,

    b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1-\cos x}$,

    c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2x-x^2}$,

    d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x-\tan 5x}{2x}$,

    e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x}{1-\cos x}$,

    f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x-1}{x\tan x}$,

    g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 (ax)}{ax^3+bx^2}$, $\quad a, b \neq 0$,

    h) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}$,

    i) $\displaystyle\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{x^2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$,

    j) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2\left(\cos\frac{1}{x}\right)$,

    k) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\tan\left(\frac{1}{x}\right)$,

11. Demuestra formalmente los límites del ejercicio 10.

12. Si $h(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$, ¿por qué no existe $h(1)$? Demuestra analíticamente que $\lim\limits_{x\to 1}$ existe y calcúlalo.

13. Si
$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \neq 2, \\ 1 & \text{si } x = 2, \end{cases}$$
encuentra el $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ y demuestra que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$. Apoya tu respuesta gráficamente.

14. Usa las propiedades de límite para demostrar que $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ existe y determina su valor si
$$\lim_{x\to 3} \frac{2f(x)-2}{(2-x)^2+2} = 2.$$

15. Usa las propiedades de límite para obtener

    a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{(2f(x)+g^2(x))^2}{2h(x)-g(x)}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{f^2(x)g(x)}{(2h(x)+1)^3}$;

si $\lim_{x\to -1} f(x) = 3$, $\lim_{x\to -1} g(x) = 2$ y $\lim_{x\to -1} h(x) = -1$.

16. El $\lim_{x\to 0} g(x)$ existe. Determina su valor para que se cumpla

$$\lim_{x\to -4}\left(x \lim_{x\to 0} g(x)\right) = 2.$$

17. Sea $f(x)$ un función definida en un intervalo que contiene a x_0 ($f(x_0)$ no está necesariamente definido). Demuestra que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x\to x_0}[f(x) - L] = 0$. *Sugerencia.* Nota que $f(x) = [f(x) - L] + L$ y aplica el teorema sobre la suma de límites.

18. Sean f y g las funciones definidas como

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 1, \\ x-1 & \text{si } 1 \le x, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x < 1, \\ 1+x & \text{si } 1 \le x. \end{cases}$$

   a) Muestra que $\lim_{x\to 1} f(x)$ y $\lim_{x\to 1} g(x)$ no existen.
   b) Define la función $f + g$.
   c) Demuestra que $\lim_{x\to 1}[f(x) + g(x)]$ existe.
   d) De los resultados de los incisos 18*a* y 18*c* se tiene que

$$\lim_{x\to 1}[f(x) + g(x)] \neq \lim_{x\to 1} f(x) + \lim_{x\to 1} g(x).$$

   ¿Contradice este hecho algún teorema de límites?

19. Supón que

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = A \quad \text{y}$$
$$\lim_{x\to x_0}(f(x) - g(x)) = B.$$

   a) Demuestra que $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$ existe y obtén su valor.
   b) ¿Bajo qué condiciones existe $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$?

20. Demuestra que si $\lim_{x\to 0} f(x) = L$, entonces

$$\lim_{x\to 0} f(3x) = L,$$

y

$$\lim_{x\to 0} f(-\frac{x}{2}) = L.$$

21. Supón que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = A \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = B.$$

Calcula en términos de A y B los siguientes límites:

   a) $\lim_{x\to 0^+} f(x^3 - x)$;
   b) $\lim_{x\to 0^+} f(x^2 - x^4)$;
   c) $\lim_{x\to 0^+} f(x - \operatorname{sen} x)$.

22. Prueba, usando la definición, que si a es cualquier constante

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+a} = 0$$

23. Usa el resultado anterior para mostrar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+2}{x+1} = 3.$$

24. Prueba que si $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ y $|g(x)| \le M$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ($M < 0$ constante), entonces

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0.$$

Concluye que, en particular,

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Sugerencia. Usa el teorema de Sándwich.

25. Sea $f(x) = \text{mín}(x, x^2)$. Calcula $\lim_{x\to 1} f(x)$. *Sugerencia.* Acota f por x y x^2 cerca de 1.

26. Demuestra que $\forall x \in \mathbb{R}$ se satisface

$$\left|\frac{x}{x^2+1}\right| \le |x|.$$

Emplea esta desigualdad para probar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2+1} = 0.$$

27. Supón que f está definida en un intervalo alrededor de $x_0 = 7$ pero no necesariamente en $x_0 = 7$ y que

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{x-7}{4}\right)^2 \leq f(x) \leq \frac{1}{2} - \left(\frac{2x-14}{7}\right)^4$$

para todo $x \in V - \{x_0\}$. Calcula $\lim_{x\to 7} f(x)$.

28. Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función tal que

$$\frac{2x-3}{x} < f(x) \leq \frac{2x^2+8x+7}{x^2} \quad \forall x > 0.$$

Calcula $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

29. Demuestra que si $\lim_{x\to c} |f(x)| = 0$, entonces $\lim_{x\to c} f(x) = 0$.
Sugerencia. Usa el teorema del Sándwich.

30. Sea f una función tal que $-2 \leq f(x) \leq 3$ para todo $x \in [-1, 1]$. ¿Existe $\lim_{x\to 0} x^2 f(x)$?

31. Calcula con detalle $\lim_{x\to 3} g(x)$ si se sabe que $|g(x) + 4| < 2(3-x)^4$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

32. Sea $M > 0$ una constante y supón que f satisface

$$|f(x) - l| \leq M|x - x_0|^2.$$

Demuestra que $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.

Referencias

[1] Jon Rogawski, *Cálculo: una variable.* Reverté, Barcelona, segunda edición, 2012.

[2] Louis Leithold, *El Cálculo.* Oxford, México, séptima edición, 2009.