Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas

Cálculo Diferencial e Integral I
(MAT14100)

Lista de Ejercicios

La integral

La integral

Antes de hacer los ejercicios, despeja un poco tu mente leyendo la biografía de Bernhard Riemann en `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Riemann.html`.

1. Encuentra la primitiva de $f(x)$ y comprueba la respuesta derivando.

   a) $\displaystyle\int 3x^4 \, \mathrm{d}x$,

   b) $\displaystyle\int 2x^7 \, \mathrm{d}x$,

   c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3} \, \mathrm{d}x$,

   d) $\displaystyle\int \frac{3}{x^5} \, \mathrm{d}x$,

   e) $\displaystyle\int 5x^{3/2} \, \mathrm{d}x$,

   f) $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \, \mathrm{d}x$,

   g) $\displaystyle\int (3x^5 - 2x^3) \, \mathrm{d}x$,

   h) $\displaystyle\int x^3(2x^2 - 3) \, \mathrm{d}x$,

   i) $\displaystyle\int (8x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 5) \, \mathrm{d}x$,

   j) $\displaystyle\int \sqrt{x}(x+1) \, \mathrm{d}x$,

   k) $\displaystyle\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \mathrm{d}x$,

   l) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2} + 5\right) \mathrm{d}x$,

   m) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 4x - 4}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$,

2. El punto (3,2) está en una curva, y en cualquier punto (x, y) de la curva la recta tangente tiene una pendiente igual a $2x - 3$. Determina la ecuación de la curva.

3. Los puntos (-1,3) y (0,2) están en una curva, y en cualquier punto (x, y) de la curva, $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x} = 2 - 4x$. Determina la ecuación de la curva.

4. Expresa los siguientes límites como integrales definidas y calcula su valor.

   a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{4}{n^3} + \cdots + \frac{n^2}{n^3}\right)$,

   b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left\{3\left(\frac{k}{n}\right)^2 - 7\left(\frac{k}{n}\right) + 2\right\}\left(\frac{1}{n}\right)$,

   c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) + \cdots + \operatorname{sen}\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)}{n}$.

5. Demuestra que si f es continua en [-1,2] entonces

$$\int_{-1}^{2} f(x) \, \mathrm{d}x + \int_{2}^{0} f(x) \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x) \, \mathrm{d}x + \int_{1}^{-1} f(x) \, \mathrm{d}x = 0.$$

6. Obtén $y = f(x)$ tal que

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{2}{x^3}$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 \qquad \text{si } x = 1$$
$$y = 1 \qquad \text{si } x = 1$$

7. Calcula $\int_a^b |t| \mathrm{d}t$ en los siguientes casos:

   a) $a < b < 0$,

   b) $0 < a < b$,

   c) $a < 0 < b$.

   Muestra entonces que

$$\int_0^x |t| \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}x|x|$$

   para todo $x \in \mathbb{R}$.

8. Evalúa

$$\int_0^1 |(2x-1)^5| \, \mathrm{d}t$$

9. Una partícula situada en el origen en $t = 1$ empieza a moverse a lo largo del eje de las abscisas con velocidad $v(t) = 6t^2 - t$ m/s. Enuncie la ecuación diferencial con la condición inicial satisfecha por la posición $s(t)$ de la partícula y encuentra $s(t)$.

10. Empezando en $t = 0$ y con velocidad inicial 4 m/s, una partícula se mueve en línea recta con aceleración $a(t)3t^{1/2}$ m/s^2. Encuentra la distancia recorrida al cabo de 25 segundos.

11. Demuestra que si f es integrable en $[-r, r]$, entonces

    a) si f es una función par, entonces
    $$\int_{-r}^{r} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{0}^{r} f(t)\ \mathrm{d}t;$$

    b) si f es una función impar, entonces
    $$\int_{-r}^{r} f(t)\ \mathrm{d}t = 0.$$

12. Sea f continua en $[-a, a]$. Muestra que
$$\int_{-a}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{0}^{a} (f(x) + f(-x))\ \mathrm{d}x.$$

13. Evalúa la integral definida.

    a) $\displaystyle\int_0^3 (3x^2 - 4x + 1)\ \mathrm{d}x$,

    b) $\displaystyle\int_0^4 (x^3 - x^2 + 1)\ \mathrm{d}x$,

    c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^2}\ \mathrm{d}x$,

    d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^3}\ \mathrm{d}x$,

    e) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}(2+x)\ \mathrm{d}x$,

    f) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{5}} x\sqrt{x^2+1}\ \mathrm{d}x$,

    g) $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{1}{(y+2)^3}\ \mathrm{d}x$,

    h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+2x}{\sqrt[3]{x^3+3x^2+4}}\ \mathrm{d}x$,

    i) $\displaystyle\int_0^3 (x+2)\sqrt{x+1}\ \mathrm{d}x$,

    j) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+1}{x+1}\ \mathrm{d}x$,

    k) $\displaystyle\int_1^4 \frac{x^5-x}{3x^3}\ \mathrm{d}x$,

    l) $\displaystyle\int_{-2}^5 |x-3|\ \mathrm{d}x$,

    m) $\displaystyle\int_{-3}^3 \sqrt{|x|+3}\ \mathrm{d}x$,

    n) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{|x|-x}\ \mathrm{d}x$.

14. Sin calcular las integrales, encuentra $f'(x)$ en cada caso.

    a) $\displaystyle\int_0^x \sqrt{4+t^6}\ \mathrm{d}t$,

    b) $\displaystyle\int_x^3 \frac{1}{t^4+4}\ \mathrm{d}t$,

    c) $\displaystyle\int_0^x (1+t^2)^{-3}\ \mathrm{d}t$,

    d) $\displaystyle\int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3}\ \mathrm{d}t$,

    e) $\displaystyle\int_{x^3}^{x^2} (1+t^2)^{-3}\ \mathrm{d}t$,

    f) $\displaystyle\int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$,

    g) $\displaystyle\left(\int_0^x \sqrt{1+s^2}\ \mathrm{d}s\right)^2$.

15. Sea
$$F(x) = \int_{2x^2}^{5x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$
Sin calcular la integral, prueba que F es constante en $(0, \infty)$.

16. Sea
$$T(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}s}{1+s^2}.$$
Demuestra que $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente y que $(0,0)$ es su único punto de inflexión.

17. Calcula
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{3x^2}^{2x} \sqrt{t^2+1}\ \mathrm{d}t\right)$$

18. Determina
$$\int_4^{16}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_5^x (2\sqrt{t}-1)\ \mathrm{d}t\right)\ \mathrm{d}x$$

19. Calcula la linealización de f alrededor de $x=1$ si
$$f(x) = x^2 + \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

20. Calcula $f(2)$ si f es continua y satisface la fórmula dada para todo $x \geq 0$.

   a) $\displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t = x^2(1+x),$

   b) $\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\ \mathrm{d}t = x^2(1+x),$

   c) $\displaystyle\int_0^{f(x)} t^2\ \mathrm{d}t = x^2(1+x),$

   d) $\displaystyle\int_0^{x^2(1+x)} f(t)\ \mathrm{d}t = x.$

21. Halla $f(4)$ si:

   a) $\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\ \mathrm{d}t = x\cos(\pi x)$

   ¿Cuántas posibles soluciones hay?

   b) $\displaystyle\int_0^{f(x)} t^2\ \mathrm{d}t = \pi\cos(\pi x).$

22. Sea f continua en $[-a,a]$, demostrar que
$$\int_{-a}^a f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^a (f(x)+f(-x))\ \mathrm{d}x$$

23. Evalúa los siguientes límites

   a) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h \tan t\ \mathrm{d}t,$

   b) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\frac{\mathrm{d}u}{u+\sqrt{u^2+1}}\ \mathrm{d}t.$

24. Sea
$$I = \int_0^k \frac{f(x)}{f(x)+f(x+k)}\ \mathrm{d}x,$$
donde f es continua en $[0,k]$ y $f(x)+f(k-x) \neq 0$ si $x \in [0,k]$.

   a) Demuestra que $I = \frac{1}{2}k$.
   Sugerencia. Considera $u = k-x$ y muestra que
$$I = \int_0^k \frac{f(k-u)}{f(u)+f(k-u)}\ \mathrm{d}u.$$
   Finalmente, regresa a las variables originales.

   b) Demuestra que
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x+\cos x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\pi.$$

25. Encuentra una función f tal que para cualquier $x \in \mathbb{R}$
$$\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{\cos x}{1+x^2} - 1.$$
Sugerencia. Deriva ambos lados.

26. Si m y n son números enteros positivos, demuestra que
$$\int_0^1 x^n(1-x)^m\ \mathrm{d}t \int_0^1 x^m(1-x)^n\ \mathrm{d}t.$$

27. Dada una función g, continua para todo x, tal que $g(1)=5$ y $\int_0^1 g(t)\ \mathrm{d}t = 2$. Sea
$$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 g(t)\ \mathrm{d}t.$$
Demuestra que
$$f'(x) = x\int_0^x g(t)\ \mathrm{d}t - \int_0^x t g(t)\ \mathrm{d}t.$$

28. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua. Prueba que
$$\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 f(1-t)\ \mathrm{d}t.$$

29. Obtén el área de la región limitada por

    a) La recta $y - x - 4 = 0$ y la curva $y = x^2$.

    b) Las curvas $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ entre $\pi/4$ y $5\pi/4$.

    c) La curva $y = \sqrt{x}$ y la recta $x + y == 6$.

    d) Las curvas $y = \cos(\pi x/2)$ y $y = 1 - x^2$ en el primer cuadrante.

    e) Las curvas $x = \tan^2 y$ y $x = -\tan^2 y$ con $-\pi/4 \le y \le \pi/4$.