Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas
Cálculo Diferencial e Integral I
(MAT14100)

Lista de Ejercicios

La derivada

La derivada

Antes de hacer los ejercicios, despeja un poco tu mente leyendo la biografía de Gottfried Wilhelm von Leibniz en `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Leibniz.html`.

Recuerda que

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{1}$$

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \tag{2}$$

1. Sea $f(x) = 5x^2$. Prueba que $f(3+h) = 5h^2 + 30h + 45$. A continuación, prueba que

   $$\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = 5h + 30$$

   y calcula $f'(3)$.

2. Calcula $f'(a)$ de dos maneras: usando la ecuación (3) y la ecuación (4).

   a) $f(x) = x^2 + 9x, \quad a = 0;$

   b) $f(x) = x^2 + 9x, \quad a = 2;$

   c) $f(x) = 3x^2 + 4x + 2, \quad a = -1;$

   d) $f(x) = x^3, \quad a = 2.$

3. Usa la definición para calcular f'. ¿Cuál es el dominio de f'?

   a) $f(x) = 2x^2 + 10x,$

   b) $f(x) = x^{-1},$

   c) $f(x) = x + x^{-1},$

   d) $f(x) = \dfrac{1}{x+3},$

   e) $f(x) = \dfrac{2}{1-x},$

   f) $f(x) = \sqrt{x+4},$

   g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}.$

4. Calcula f' si:

   a) $f(x) = x - \sqrt{x},$

   b) $f(x) = 4x^{5/3} - 3x^{-2} - 12,$

   c) $f(x) = 6\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}},$

   d) $f(x) = \dfrac{x}{x-1},$

   e) $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x^4+x^2+1},$

   f) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}},$

   g) $f(x) = \left(\dfrac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{1/3},$

   h) $f(x) = (1+x)(2+x^2)^{1/2}(3+x^3)^{1/3},$

   i) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})},$

   j) $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}.$

5. Sean $f(x) = \dfrac{1}{1+1/x}$ si $x \neq 0$, y $g(x) = \dfrac{1}{1+1/f(x)}$. Calcula f' y g'.

6. Resuelve los ejercicios 66-70 de la página 120 de [1] (Sección 3.2)

7. Calcula f' si:

   a) $f(x) = x^4 + \operatorname{sen} x,$

   b) $f(x) = x^4 \operatorname{sen} x,$

   c) $f(x) = \dfrac{1}{2+\cos x},$

   d) $f(x) = \dfrac{2-\operatorname{sen} x}{2-\cos x},$

   e) $f(x) = \dfrac{x \operatorname{sen} x}{1+x^2},$

   f) $f(x) = \tan(x)\sec(x),$

   g) $f(x) = x\tan x,$

   h) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x},$

i) $f(x) = \dfrac{1}{x + \operatorname{sen} x}$,

j) $f(x) = \cos(2x) - \operatorname{sen}(2x)$,

k) $f(x) = (2 - x^2)\cos(x^2) + 2x\operatorname{sen}(x^3)$,

l) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos^2 x) \cdot \cos(\operatorname{sen}^2 x)$,

m) $f(x) = \operatorname{sen}^n(x) \cdot \cos(nx)$,

n) $f(x) = \operatorname{sen}[\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)]$,

ñ) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x^2}$,

o) $f(x) = \tan\dfrac{x}{2} - \cot\dfrac{x}{2}$,

p) $f(x) = \sec^2 x + \csc^2 x$.

8. Determina g' en función de f' si:

   a) $g(x) = f(x^2)$,

   b) $g(x) = f(\operatorname{sen}^2 x) + f(\cos^2 x)$,

   c) $g(x) = f[f(x)]$,

   d) $g(x) = f\{f[f(x)]\}$.

9. Calcula $f'(0)$ si

   a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

   c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

10. Calcula la segunda derivada para las funciones de los ejercicios 3, 4, y 7.

11. Aplica la definición de la derivada para mostrar que
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|x| = \frac{x}{|x|}.$$
si $x \neq 0$.
Sugerencia. Considera $|x| = \sqrt{x^2}$ o hazlo por casos.

12. Calcula f' si:

    a) $f(x) = |x^2 - 4|$,

    b) $f(x) = x|x|$,

    c) obtén, si los hay, los puntos x donde no exista $f'(x)$.

13. Sean $f(x) = 3x + |x|$ y $g(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}|x|$. Demuestra que ni $f'(0)$ ni $g'(0)$ existen pero que $(f \circ g)'(0)$ existe.
Sugerencia. Analiza la composición si $x \geq 0$ y si $x < 0$.

14. Sea $g(x) = |f(x)|$. Demuestra que si $f'(x)$ y $g'(x)$ existen, entonces $|g'(x)| = |f'(x)|$.
Sugerencia.
$$g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

15. Sea $g(x) = |f(x)|$. Si $f^{(n)}(x)$ existe y $f(x) \neq 0$, demuestra que
$$g^{(n)}(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|} f^{(n)}(x).$$
Sugerencia. Considera $|f(x)| = \sqrt{f^2(x)}$.

16. Determina $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ por medio de diferenciación implícita:

    a) $x^2 + y^2 = 16$,

    b) $4x^2 - 9y^2 = 1$,

    c) $x^2 + y^2 = 7xy$,

    d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$,

    e) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$,

    f) $\cos(x - y) = y$,

    g) $x\operatorname{sen} y + y\cos x = 1$,

    h) $\sec^2 x + \csc^2 y = 4$.

17. Si $0 < x < 5$ la ecuación $x^{1/2} + y^{1/2} = 5$ define y como función de x. Sin resolverla respecto a y, muestra que y' tiene signo constante. (Supón la existencia de y'.)

18. La ecuación $3x^2 + 4y^2 = 12$ define implícitamente dos funciones y de x si $|x| \leq 2$. Suponiendo que y'' existe, muestra que verifica la ecuación $4y^3y'' = -9$.

19. La ecuación $x\,\mathrm{sen}(xy) + 2x^2 = 0$ define implícitamente y como función de x. Suponiendo que y' existe, demuestra que satisface la ecuación $y'x^2\cos(xy) + xy\cos(xy) + \mathrm{sen}(xy) + 4x = 0$.

20. Dada la fórmula
$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{x - 1}$$
($x \neq 1$) derivala y encuentra la fórmula para las siguientes sumas:

    a) $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$;

    b) $1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \cdots + n^2x^n$.

21. Sea f una función derivable derivable en $t_0 = 0$ tal que
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{\mathrm{sen}\, t} = 1.$$
Calcula:

    a) $\lim\limits_{t\to 0} f(t)$,

    b) $f'(0)$.

22. Una función f está definida como sigue:
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } |x| \leq c, \\ ax + b & \text{si } |x| > c. \end{cases}$$
Encuentra los valores de a y b (en función de c) tales que $f'(c)$ exista.

23. Resuelve nuevamente el ejercicio 22 si f está definida como sigue:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{si } |x| > c, \\ a + bx^2 & \text{si } |x| \leq c. \end{cases}$$

24. Existe un polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tal que $p(0) = p(1) = -2$, $p'(0) = -1$ y $p''(0) = 10$. Calcula a, b, c, y d.

25. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|f(y) - f(x)| \leq (y - x)^2\ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Demuestra que f es constante. *Sugerencia.* Usa la definición de la derivada para probar que $f'(x) = 0\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

26. Supón que $u(1) = 2$, $u'(1) = 2$, $v(1) = 5$, $v'(1) = 0$. Determina:

    a) $\left(\dfrac{2u + \sqrt{v}}{u^2 + 4v}\right)'(1)$

    b) $\left(\dfrac{2uv + \sqrt{u}}{u + 2v}\right)'(1)$

27. Sea f derivable en x_0 sea $f(x_0) = 0$. Demuestra que si g es continua en x_0, entonces fg es derivable en x_0 y $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)$. Concluye que
$$x|x|,\ x^{1/3}\,\mathrm{sen}\,x,\ x^{2/3}\,\mathrm{sen}\,x,\ (1 - \cos x)\sqrt{|x|}$$
son todas derivables en $x_0 = 0$ y determina el valor de sus derivadas en x_0.
Sugerencia. Usa la definición de la derivada.

28. Si g es continua en a y $f(x) = (x - a)g(x)$, determina $f'(a)$.
Sugerencia. Utiliza la fórmula (4).

29. Supón que $f'(a)$ existe. Muestra que
$$f'(a) = \lim_{l\to 0} \frac{f(a) - f(a - l)}{l}.$$
Sugerencia. Usa la fórmula $f(a + h) - f(a) = -(f(a) - f(a + h))$ y define $l = -h$.

30. Si $f'(a)$ existe, demuestra que
$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h}.$$
Sugerencia. Usa el ejercicio 29 y la fórmula $f'(a) = \frac{1}{2}f'(a) + \frac{1}{2}f'(a)$

31. Sean f, g ,h funciones derivables. Prueba que $(fgh)'(x)$ es igual a:
$$f(x)g(x)h'(x) + f(x)g'(x)h(x) + f'(x)g(x)h(x)$$

32. Usa la definición de la derivada para mostrar que
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$
Sugerencia. Prueba que el cociente incremental para $1/f(x)$ es igual a:
$$\frac{f(x) - f(x+h)}{hf(x)f(x+h)}$$

33. En este ejercicio realizarás la demostración de la regla del cociente que dió Maria Agnesi es su libro sobre cálculo, publicado en 1748: supón que que f, g y $h = f/g$ son derivables. Calcule la derivada de $hg = f$ usando la regla del producto y despeja h'.

34. Un resultado básico de álgebra establece que c es una raíz de un polinomio $f(x)$ si y sólo si $f(x) = (x-c)g(x)$ para algún polinomio $g(x)$. Se dice que c es una raíz múltiple si $f(x) = (x-c)^k h(x)$ donde $h(x)$ es un polinomio y $k \in \mathbb{N},\ k > 1$.

    a) Prueba que c es una raíz múltiple de $f(x)$ si y sólo si c es una raíz tanto de $f(x)$ como de $f'(x)$.

    b) Aplique el resultado anterior para determinar si $c = -1$ es una raíz múltiple de

    1) $x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 8x^2 - x + 2$,
    2) $x^4 + x^3 - 5x^2 - 3x + 2$.

35. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(a+b) = f(a)f(b)$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Además supón que $f(0) = 1$ y que $f'(0)$ existe. Demuestre que $f'(x)$ existe para toda x y que
$$f'(x) = f'(0)f(x).$$

36. Supón que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene la propiedad de
$$-x^2 \leq f(x) \leq x^2 \quad \forall x.$$
Prueba que f es diferenciable en $x = 0$ y que $f'(0) = 0$.
Sugerencia. Usa el teorema del Sándwich. ¿Qué pasa en la desigualdad si $x = 0$?

37. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable en $x = 0$. Prueba que
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x^2) - f(0)}{x} = 0.$$

38. Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada. Define $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por
$$f(x) = 1 + 4x + x^2 h(x) \quad \forall x.$$
Prueba que $f(0) = 1$ y $f'(0) = 4$. Nota que no hay ninguna suposición sobre la diferenciablidad de h.

39. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es llamada par si $f(x) = f(-x)$ para todo x; y es llamada impar si $f(x) = -f(-x)$ para todo x. Prueba que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable e impar, entonces $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es par.

Referencias

[1] Jon Rogawski, *Cálculo: una variable*. Reverté, Barcelona, segunda edición, 2012.