Cálculo Diferencial e Integral I - ITAM

Definiciones de límites

En las siguientes definiciones a se supone punto de acumulación de $\mathrm{Dom}(f)$, es decir, cualquier intervalo abierto que contiene a a contiene puntos de $\mathrm{Dom}(f)$ distintos de a. Usualmente $\delta = \delta(\varepsilon, a)$.

1. $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$,
$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que si } x \in \mathrm{Dom}(f) \text{ y } 0 < |x-a| < \delta \text{ entonces } |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$
2. $\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$,
$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que si } x \in \mathrm{Dom}(f) \text{ y } a < x < a+\delta \text{ entonces } |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$
3. $\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell$,
$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que si } x \in \mathrm{Dom}(f) \text{ y } a-\delta < x < a \text{ entonces } |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$
4. $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$,
$$\forall\, M > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que si } x \in \mathrm{Dom}(f) \text{ y } 0 < |x-a| < \delta \text{ entonces } f(x) > M.$$
5. $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$,
$$\forall\, M < 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que si } x \in \mathrm{Dom}(f) \text{ y } 0 < |x-a| < \delta \text{ entonces } f(x) < M.$$
6. $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$,
$$\forall\, M > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que si } x \in \mathrm{Dom}(f) \text{ y } a < x < a+\delta \text{ entonces } f(x) > M.$$
7. $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$,
$$\forall\, M < 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que si } x \in \mathrm{Dom}(f) \text{ y } a < x < a+\delta \text{ entonces } f(x) < M.$$
8. $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$,
$$\forall\, M > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que si } x \in \mathrm{Dom}(f) \text{ y } a-\delta < x < a \text{ entonces } f(x) > M.$$
9. $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$,
$$\forall\, M < 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que si } x \in \mathrm{Dom}(f) \text{ y } a-\delta < x < a \text{ entonces } f(x) < M.$$
10. $\lim_{x\to \infty} f(x) = \ell$,
$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, M > 0 \text{ tal que si } x \in \mathrm{Dom}(f) \text{ y } x > M \text{ entonces } |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$
11. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \ell$,
$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, M < 0 \text{ tal que si } x \in \mathrm{Dom}(f) \text{ y } x < M \text{ entonces } |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$
12. $\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$,
$$\forall\, C > 0\ \exists\, M > 0 \text{ tal que si } x \in \mathrm{Dom}(f) \text{ y } x > M \text{ entonces } f(x) > C.$$
13. $\lim_{x\to \infty} f(x) = -\infty$,
$$\forall\, C < 0\ \exists\, M > 0 \text{ tal que si } x \in \mathrm{Dom}(f) \text{ y } x > M \text{ entonces } f(x) < C.$$
14. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$,
$$\forall\, C > 0\ \exists\, M < 0 \text{ tal que si } x \in \mathrm{Dom}(f) \text{ y } x < M \text{ entonces } f(x) > C.$$
15. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$,
$$\forall\, C < 0\ \exists\, M < 0 \text{ tal que si } x \in \mathrm{Dom}(f) \text{ y } x < M \text{ entonces } f(x) < C.$$