Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas

Cálculo Diferencial e Integral I
(MAT14100)

Lista de Ejercicios

Continuidad

Continuidad

Antes de hacer los ejercicios, despeja un poco tu mente leyendo en MacTutor las biografías de Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano, de Augustin Louis Cauchy y de Karl Theodor Wilhelm Weierstrass.

1. Determina los números en los que la función dada es continua. Justifica.

   a) $f(x) = x^2(x+3)^2$,

   b) $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$,

   c) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+2x-8}$,

   d) $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x < 2, \\ 4-x^2 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$,

   e) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 2, \\ \frac{2}{9-x} & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$,

   f) $f(x) = \begin{cases} 2x - \sqrt[3]{x} & \text{si } x \leq 1, \\ x\sqrt{x} & \text{si } x > 1. \end{cases}$.

2. Para los siguientes incisos, la función dada es discontinua en el punto $x = a$. Determina si la discontinuidad es removible[1] o de salto; en caso de que sea removible[2], indique cómo debe definirse $f(a)$ para que la discontinuidad sea eliminada.

   a) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2};\ a = 2$,

   b) $f(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{x+3};\ a = -3$,

   c) $f(x) = \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3};\ a = 9$,

   d) $f(x) = \dfrac{x-5}{\sqrt{x-1}-2};\ a = 5$,

   e) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x};\ a = 0$,

   f) $f(x) = \dfrac{x+3}{3-|x|};\ a = \pm 3$,

   g) $f(x) = \dfrac{x+5}{|x+1|-4};\ a = -5$,

3. Sea
$$f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{si } 0 < x < 1, \\ 2x - x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ x^2 - bx + 4 & \text{si } 2 < x \leq 3. \end{cases}$$
   Determina los valores de a y b para que la función sea continua.

4. Sea
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } 0 < x < 1, \\ a & \text{si } x = 1, \\ bx-1 & \text{si } 1 < x < 2, \\ c & \text{si } x = 2, \\ x^2 + dx - 3 & \text{si } 2 < x \leq 3. \end{cases}$$
   Determina los valores de a, b, c y d para que la función sea continua.

5. Sea
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + bx + 3 & \text{si } x < -2, \\ a & \text{si } x = -2, \\ (x-a)^2 & \text{si } x > -2. \end{cases}$$
   Determina los valores de a y b para que la función sea continua. Traza la gráfica final.

6. Determina los valores de a, b y c para que
$$\begin{cases} ax+b & \text{si } x < -1, \\ bx^2+1 & \text{si } -1 \leq x < 1, \\ c & \text{si } x = 1, \\ \sqrt{x^2-1} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

7. Sean $g(x) = x(1-x^2)$ y
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

[1]Discontinuidad removible es un punto del dominio donde la función es discontinua pero los límites laterales existen y son iguales.

[2]Discontinuidad de salto es un punto del dominio donde la función es discontinua pero los límites laterales existen y son distintos.

Determina todos los puntos en los que $f \circ g$ y $g \circ f$ son discontinuas.

8. Demuestra que la función definida por

$$f(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

donde n es un entero positivo, tiene una discontinuidad removible en 1.
Sugerencia. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

9. Demuestra a partir de la definición que las siguientes funciones son continuas en x_0.

   a) $x_0 = 2$ con
   $$f(x) = 2 - \sqrt{x+2}.$$

   b) $x_0 = -2$
   $$f(x) = \sqrt{|x^2 - 4|}.$$

10. Demuestra a partir de la definición que las siguientes funciones son continuas en x_0.

    a) $x_0 = 2$ con
    $$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x = 2, \\ \frac{2x - x^2}{x-2} & \text{si } x \neq 2. \end{cases}$$

    b) $x_0 = 1$ con
    $$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x-1} & x \neq 1, \\ -2 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

11. Proporciona ejemplos de funciones f y g tales que:

    a) ni f ni g son continuas en $x_0 = 2$ pero $f+g, f-g$ y fg son continuas en x_0;

    b) g es discontinua en $x_0 = 0$, f es discontinua en $g(x_0)$, pero $f \circ g$ es continua en x_0.

12. Supón que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es continua, que no tiene ceros en $[0,1]$ y que $f(0) = 2$. Demuestra que $f(x) > 0$ para todo $x \in [0,1]$.

13. Prueba que las gráficas de $y = x^7 - 2x^3$ y de $y = 3x^2 - 4$ se intersecan.

14. Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $f(a) < g(a)$ y $f(b) > g(b)$. Prueba que $\exists c \in (a,b)$ tal que $f(c) = g(c)$.

15. Demuestra que
    $$\frac{1}{5 + \cos x} = x + 1$$
    tiene al menos una solución. Aproxima la solución.

16. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ continua tal que $f(\frac{1}{2}) \neq 1$ y sea $g(x) = 4x(1-x)$. Demuestra que f y g coinciden en al menos dos puntos de $[0,1]$.

17. Sea $f : [0,2] \to [0,1]$ definida por $f(x) = (x-1)^2$ y sea $g : [0,2] \to [0,1]$ continua y tal que $g(1) \neq 0$. Demuestra que existen $c_1, c_2 \in [0,2]$ tales que $f(c_i) = g(c_i)$ para $i = 1, 2$.

18. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) \neq 0 \ \forall x \in [a,b]$. Prueba que $f(c)f(d) > 0 \ \forall c, d \in [a,b]$.

19. Sea $f(x) = x\left[\frac{1}{x}\right]$, donde $[x]$ es la función parte entera. Prueba que para todo $x \neq 0$,
    $$\frac{1}{x} - 1 \leq \left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x}$$
    A continuación, prueba que
    $$\lim_{x \to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1.$$
    Sugerencia. Considera los límites laterales por separado.

20. *a*) Demuestra que el polinomio $p(x) = x^3 - 3x + 1$ tiene una raíz en el intervalo $(-1,1)$. Verifica que es la única raíz del polinomio en el intervalo dado.

    b) Demuestra que todo polinomio cúbico tiene al menos una raíz real.

    c) Demuestra que si un polinomio es de grado impar, entonces al menos tiene una raíz real.

    d) Da ejemplos de polinomios de grado par con y sin raíces reales.

21. Aplica el Teorema del Valor Intermedio para demostrar que si f es continua e inyectiva en un intervalo $[a, b]$, entonces f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

22. *Punto fijo.* Sea f una función continua en el intervalo $[0, 1]$ y tal que $0 \leq f(x) \leq 1$ para toda $x \in [0, 1]$. Muestra que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$.

23. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(a) \leq a$ y $f(b) \geq b$. Muestra que f tiene un punto fijo en $[a, b]$.

24. En este ejercicio demostrarás la continuidad de las funciones seno y coseno.

    a) Supón que $|\operatorname{sen} x| < |x|$ para $0 < |x| < \frac{1}{2}\pi$. Usa esta desigualdad para mostrar que la función seno es continua en 0.

    b) Usa 24a y la identidad $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$ para mostrar la continuidad del coseno en 0.

    c) Usa las fórmulas de adición para $\operatorname{sen}(x + h)$ y $\cos(x + h)$ para mostrar que las funciones seno y coseno son continuas en cualquier $x \in \mathbb{R}$.

25. Supón que la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y tal que $f(a) \neq f(b)$. Para $n \in \mathbb{N}$, sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ puntos en $[a, b]$. Prueba que hay un punto $z \in [a, b]$ en el que

    $$f(z) = \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

    Da un ejemplo en el que $f(a) = f(b)$ pero no se cumple la conclusión del ejercicio anterior.