Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas
Cálculo Diferencial e Integral I
(MAT14100)

Lista de Ejercicios

# Aplicaciones de la derivada

## Aplicaciones de la derivada

Antes de hacer los ejercicios, despeja un poco tu mente leyendo la biografía de Brook Taylor en `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Taylor.html`.

1. En los siguientes ejercicios, obtén la ecuación de la recta tangente en el punto dado. Dibuja la gráfica de la ecuación y muestre un segmento de la recta tangente en el punto dado.

   *a)* $y = 9 - x^2, \quad (2,5);$

   *b)* $y = x^2 + 4, \quad (-1,5);$

   *c)* $y = 2x^2 + 4x, \quad (-2,0);$

   *d)* $y = x^2 - 6x + 9, \quad (3,0);$

   *e)* $y = x^3 + 3, \quad (1,4);$

   *f)* $y = 1 - x^3, \quad (2,-7);$

2. Demuestra que no existe una recta que pase por el punto $(1,5)$ que sea tangente a la curva $y = 4x^2$.

3. Obtén una ecuación de la recta normal a la curva $y = x^3 - 3x$ y que sea paralela a la recta $2x + 18y - 9 = 0$

4. Determina los valores de $a$ y $b$ tales que el punto $P_0(1,1)$ pertenezca a la curva $4x^2 + ay^2 = b$ y que la recta normal a través de $P_0$ sea $4y - 3x = 1$.

5. Encuentra los puntos de intersección de las curvas $x^2 + y^2 = 2$ y $x^2 + xy + y^2 = 1$ y determina las ecuaciones de las rectas tangentes en esos puntos. ¿Son las curvas tangentes en esos puntos?

6. Sea $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x$. Demuestra que $g(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1$ tiene al menos una raíz en $(0,1)$.

7. Demuestra que $f(x) = x^4 + 5x^3 + 4x$ no tiene ningún cero $c$ que sea mayor a cero.

8. Verifica que las siguientes funciones satisfacen las hipótesis del Teorema del Valor Medio (TVM) y a continuación encuentra $c$ que satisfaga la conclusión del TVM.

   *a)* $f(x) = x^2 + 2x - 1 \quad [0,1],$

   *b)* $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x - 7}, \quad [2,6];$

   *c)* $f(x) = \sqrt{1 + \cos x} \quad [\frac{-1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi].$

9. La *media aritmética* de dos números $a$ y $b$ es $\frac{a+b}{2}$. Demuestra que el valor $c$ de la conclusión del TVM para $f(x) = x^2$ en el intervalo $[a,b]$ es la media aritmética de $a$ y $b$.

10. La *media geométrica* de dos números $a$ y $b$ es $\sqrt{ab}$. Demuestra que el valor $c$ de la conclusión del TVM para $f(x) = 1/x$ en el intervalo $[a,b]$ es la media geométrica de $a$ y $b$.

11. Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas, diferenciables en $(a,b)$ y tales que $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$. Demuestra que existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = g'(c)$.

12. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y diferenciable en $(a,b)$. Si $f(b) = f(a)$, demuestra que existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) < 0$.

13. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable. Supón que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty, c)$ y $f'(x) > 0$ si $x \in (c, \infty)$. Prueba que $f$ alcanza su mínimo absoluto en $x = c$.

14. Sean $f, g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ continuas, diferenciables en $(a,\infty)$ y tales que $f(a) = g(a)$ y $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prueba que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in (a,\infty)$.

15. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y diferenciable en $(a,b)$. Prueba que $f$ es inyectiva si $f'(x) \neq 0$ para toda $x \in (a,b)$.

16. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, diferenciable en $(a,b)$ y tal que $|f'(x)| \leq M$ para toda $x \in (a,b)$. Demuestra que, para toda $x, y \in [a,b]$,

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

17. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, diferenciable en $(a,b)$ y tal que $f'(x) \neq 0$ para toda $x \in (a,b)$ y $f(a)f(b) < 0$. Prueba que existe un único $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

18. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y derivable dos veces en $(a,b)$. Supón que $f$ tiene tres raíces en $[a,b]$. Prueba que $f'$ tiene al menos dos raíces en $(a,b)$ y $f''$ tiene al menos una raíz en $(a,b)$.

19. Demuestra que cualquier polinomio cúbico $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ tiene a lo más tres raíces reales.

20. Usa el TVM para demostrar que si $x \geq 0$, entonces $\operatorname{sen}(x) \leq x$.
    *Sugerencia.* Hay dos casos: $x > 1$ y $0 \leq x \leq 1$. En el segundo caso, considera $f(x) = x - \operatorname{sen} x$ y usa el Teorema del Valor Medio para $a = 0$ y $b = x$. Deberás llegar a algo como $x(1 - \cos c) = f(x)$ con $0 < c < 1$. El miembro izquierdo de esta ecuación es positivo por lo que $f(x) > 0$.

21. Usa el TVM para demostrar que si $x > 0$, entonces $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$.
    *Sugerencia.* Sea $f(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$.

22. Si $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$, demuestra que $f(x) = 1$ para todo $x$ en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.
    *Sugerencia.* Muestra que $f'(x) = 0$ en el intervalo.

23. Si $f$ es continua en $[a,b]$ y $f'(x) = 1$ para toda $x \in (a,b)$, demuestra que $f(x) = x - a + f(a)$ para toda $x \in [a,b]$.
    *Sugerencia.* Considera $x \in (a,b]$ y después $[a,x]$

24. Para las siguientes funciones determina sus puntos críticos y la naturaleza de éstos en el intervalo dado.

    *a*) $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x,\ \mathbb{R};$

    *b*) $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 16x + 1,\ \mathbb{R};$

    *c*) $f(x) = x^{6/5} - 12x^{1/5},\ \mathbb{R};$

    *d*) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x-2},\ \mathbb{R};$

    *e*) $f(x) = \operatorname{sen} 2x \cos 2x,\ \mathbb{R};$

    *f*) $f(x) = \sec^2 3x,\ \mathbb{R};$

    *g*) $f(x) = 4 - 3x,\ (-1, 2];$

    *h*) $f(x) = \sqrt{4 - x^2},\ (-2, 2);$

    *i*) $f(x) = \dfrac{4}{(x-3)^2},\ [2, 5);$

    *j*) $f(x) = \dfrac{3x}{9 - x^2},\ (-3, 2);$

    *k*) $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-5} & \text{si } x \neq 5, \\ 2 & \text{si } x = 5, \end{cases}\ [3, 5];$

    *l*) $f(x) = \begin{cases} 2x - 7 & \text{si } -1 \leq x \leq 2, \\ 1 - x^2 & \text{si } 2 < x \leq 4, \end{cases}\ [-1, 4];$

    *m*) $f(x) = |x - 4| + 1,\ (0, 6);$

    *n*) $f(x) = |4 - x^2|,\ \mathbb{R};$

    *ñ*) $f(x) = \begin{cases} |x + 1| & \text{si } x \neq -1, \\ 3 & \text{si } x = -1, \end{cases}\ [-2, 1];$

    *o*) $f(x) = \operatorname{sen} x^{3/5},\ [\pi/4, \pi/4].$

25. Si $f'(c) = 0$ y $f(c)$ no es ni un mínimo local, ni un máximo local, ¿debe ser $x = c$ un punto de inflexión? Esto es cierto para funciones *razonables* (como la mayoría de las funciones que estudiarás en tu curso de Cálculo), pero no es cierto en general. Sea:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

    *a*) Usa la definición de la derivada para probar que $f'(0)$ existe y que $f'(0) = 0$.

    *b*) Prueba que $f(0)$ no es ni un mínimo local ni un máximo local.

    *c*) Prueba que $f'(x)$ cambia infinitas veces de signo cerca de $x = 0$. Concluye que $x = 0$ no es un punto de inflexión.

26. Para las siguientes funciones: (i) obtén el dominio; (ii) determina los puntos críticos, extremos locales y puntos de inflexión (iii) identifica los intervalos donde es creciente o decreciente, cóncava o convexa; (iv) obtén las asíntotas verticales y horizontales (si existen); (v) traza la gráfica de la función. Verifica tus respuestas en `http://graph.tk/`.

    *a*) $f(x) = x^2 - 3x + 2,$

*b*) $f(x) = x^3 - 4x$,

*c*) $f(x) = (x-1)^2(x+2)$,

*d*) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$,

*e*) $f(x) = 2 + (x-1)^4$,

*f*) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$,

*g*) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$,

*h*) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$,

*i*) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$,

*j*) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-9}$,

*k*) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$,

*l*) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$,

*m*) $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$,

*n*) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$,

*ñ*) $f(x) = x - \operatorname{sen} x$,

*o*) $f(x) = x + \cos x$,

*p*) $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{12}\cos 2x$.

*Una recta $y = ax + b$ se denomina **asíntota oblicua** de la función $f$ si:*

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$$

*o*

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0.$$

27. Si $f(x) = P(x)/Q(x)$ donde $P$ y $Q$ son polinomios de grados $m+1$ y $m$, entonces, efectuando la división de polinomios, se puede escribir:

$$f(x) = (ax+b) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

donde $P_1$ es un polinomio de grado menor que $m$. Prueba que $y = ax + b$ es una asíntota oblicua de $f(x)$. Usa este procedimiento para determinar las asíntotas oblicuas de las siguientes funciones:

*a*) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$,

*b*) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$,

*c*) $f(x) = \dfrac{x^3+x}{x^2+x+1}$,

*d*) $f(x) = 3x + \dfrac{1}{x^2}$.

Traza la gráfica de las funciones.

28. Determina los valores de $a$ y $b$ que hacen que $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tenga un mínimo local en $x = 4$ y un punto de inflexión en $x = 1$.

29. Encuentra el punto de la curva $y = \sqrt{x}$ más cercano al punto $(\frac{1}{2}, 16)$. ¿Cuál es la distancia mínima?

30. Determina las coordenadas del punto sobre la recta $y = mx+b$, $b \neq 0$ más proximo al origen, así como esa distancia mínima.
*Sugerencia.* Minimza la distancia al cuadrado.

31. Obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ a través del punto en el que la pendiente es mínima, así como las coordenadas del punto de tangencia.

32. En una comunidad particular, cierta epidemia se propaga de modo que $x$ meses después del inicio de la epidemia, $P$ porcentaje de la población está infectada, donde

$$P = \frac{30x^2}{(1+x^2)^2}$$

¿en cuántos meses se infectará el número máximo de personas de la comunidad y qué porcentaje de la población será éste?

33. Si $R$ metros es el alcance de un proyectil, entonces

$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g} \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi,$$

donde $v_0$ m/s es la velocidad inicial, $g$ m/s$^2$ es la aceleración debida a la gravedad, y $\theta$ es la medida en radianes del ángulo que el cañón forma con la horizontal. Determine el valor de $\theta$ que hace máximo el alcance del proyectil.

34. Una empresa de servicios turísticos ofrece un tour de antros con barra libre y transporte. La empresa incurre en un costo fijo de \$24,000 y un costo adicional de \$128 por persona. Determina el número óptimo de personas que contratan el tour sabiendo que la empresa ofrece las siguientes tarifas:

    *a*) \$200 por persona si van 50 personas al recorrido (número mínimo para contratar el servicio).

    *b*) Por cada persona adicional, hasta un máximo de 80 personas en total, la tarifa se reduce en \$2 por persona.

35. Producir y distribuir cierto artículo cuesta $c$ pesos por artículo. Si éste se vende a $p$ pesos cada uno, el número de artículos que pueden venderse a ese precio está dado por

$$q = \frac{a}{p-c} + b(100-p)$$

donde $a, b$ son constantes positivas. ¿Cuél es el precio de venta que dejará el ingreso máximo y cuál es éste?

36. Un trozo de alambre de 10 metros de longitud se corta en dos partes. Con una parte se hace una circunferencia y la otra se dobla en forma de cuadrado. ¿Cómo debe cortarse el alambre de modo que

    *a*) el área total de las dos figuras sea la mánima posible?

    *b*) el área total de las dos figuras sea la máxima posible?

37. *Desigualdad de Bernoulli*. Sea $m > 1$ constante. Prueba que

$$(1+x)^m \geq 1 + mx$$

para toda $x \leq -1$.
*Sugerencia*. Obtén el mínimo de $f(x) = (1+x)^m - mx$ en $[-1, \infty)$.

38. Dados $n$ números reales $a_1, \ldots, a_n$, demuestra que la $\sum_{k=1}^{n}(x-a_k)^2$ es mínima cuando $x$ es la media aritmética de $a_1, \ldots, a_n$.

39. Demuestra que la aproximación lineal para $f(x) = (1+x)^k$ es $L(x) = 1+kx$. Usa esta aproximación para estimar $\sqrt[3]{1.0003}$ y $0.99904^{7/5}$.

40. Supón que tanto el radio $r$ como la altura $h$ de un cono circular varían a razón de 2 cm/s. ¿Con qué rapidez aumenta el volumen del cono cuando $r = 10$ y $h = 20$?

41. Una partícula se desplaza en el plano $xy$ sobre la gráfica de $4y = x^2 + 2x$. Determina la coordenadas del punto sobre la gráfica en el que las tasas de cambio de la abscisa y de la ordenada sean iguales. (Supón que $x$ e $y$ dependen del tiempo).

42. Una patrulla viaja al sur en una carretera a una velocidad de 120 Km/h y se encuentra a 0.5 Km del cruce con otra carretera que va de este a oeste. En esta última carretera un automóvil se encuentra a 1 Km del cruce y viaja en dirección oeste. La patrulla tiene un radar que calcula que la distancia entre ambos aumenta a una razón de 30 Km/h. ¿A qué velocidad se desplaza el automóvil?

43. Una partícula se desplaza sobre la elipse $9x^2 + 16y^2 = 25$ en sentido contrario a las manecillas del reloj.

    *a*) ¿Cuál es la tasa de variación de la abscisa cuando la partícula pasa por el punto (1,1) si la coordenada $y$ aumenta a razón de 6 m/s?

    *b*) Encuentra $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ cuando la partícula pasa por el punto superior y por el inferior de la elipse.

44. Dos trenes salen de una estación cuando $t = 0$ y circulan con velocidad constante $v$ a lo largo de vías rectilíneas que forman un ángulo $\theta$.

    *a*) Prueba que los trenes se separan uno del otro a una velocidad de $v = \sqrt{2 - 2\cos\theta}$.

    *b*) ¿A qué es igual esta fórmula si $\theta = \pi$?

45. En cierto momento $t_0$ un edificio de 40 metros de altura proyecta una sombra de 60 metros sobre el piso. En ese momento el ángulo $\theta$ que el sol forma con el piso está aumentando a una razón de 0.05 radianes/minuto. ¿A qué razón está disminuyendo la sombra?

46. Un triángulo rectángulo variable $ABC$ en el plano $xy$ tiene su ángulo recto en el vértice $B$, un vértice $A$ fijo en el origen, y el tercer vértice $C$ sobre la parábola $y = 1 + \frac{7}{36}x^2$. El vértice $B$ parte del punto (0,1) en el tiempo $t = 0$ y se desplaza hacia arriba siguiendo el eje $y$ a una velocidad constante de 2 cm/s. ¿Con qué rapidez crece el área el triángulo cuando $t = 7/2$ segundos?